

Հ. Ա. Միքայելյան

Գեղեցիկը, Մաթեմատիկան և Ռոբոտիկան

Ի տալ

Գեղեցիկը և Մաթեմատիկան

Հ. Ս. Միքայելյան

**ԳԵՂԵՑԻԿԸ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԵՎ ԿՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ**

Մաս I

**ԳԵՂԵՑԻԿԸ
ԵՎ
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ**



Երևան 2014

Գլուխ 1. ԳԵՂԵՑԻԿԸ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ

Գեղեցիկը և այն մարմնավորող ստեղծագործության պահանջը անբաժան են մարդուց, և առանց դրանց մարդը, հավանաբար, չէր ուզի ապրել:

Ֆյոդոր Պոստոնսկի



Ալբրեխտ Դյուրեր,

Մեյսնխայմ, 1514: Հարթաբանդակում Դյուրերը հիմնական պատկերը շրջապատել է ճարտարապետության և երկրաչափության առարկաներով: Մաթեմատիկոսները այս գլուխգործոցը համարում են մաթեմատիկայի ներկայացուցիչը արվեստում

§1. ԳԵՂԵՑԻԿԸ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ

Գեղեցիկից բացի ոչինչ դուր չի գալիս, գեղեցիկի մեջ ոչինչ դուր չի գալիս, բացի ձևից, ձևի մեջ՝ ոչինչ՝ բացի համեմատությունը, համեմատության մեջ՝ ոչինչ՝ բացի թվից:

Ավրելիոս Ավգուստինոս



Վեներա, Հելլենիզմ, մ.թ.ա. III—II դ.,

մարմար, Սանկտ-Պետերբուրգ, Էրմիտաժ

1. Գեղեցիկը

Մարդկությանը դարեր շարունակ հետաքրքրել և հուզել է գեղեցիկը, մարդուն հանգիստ չի տվել գեղեցիկի գաղտնիքներն իմանալու ցանկությունը: Դեռևս մ.թ.ա. XXV դարի շումերական արձանագրություններում դիտարկվում է գեղեցիկի և օգտակարի փոխհարաբերության հարցը. սուկրատեսյան՝ «գեղեցիկը առավել օգտակարն է» մոտեցումը նրանից մի քանի հազար տարի առաջ ընդունում են շումերները: Նույն մոտեցմամբ հին եգիպտացիները Նեղոսի գեղեցկությունը վերագրում են նրան, որ այն «բերում է հաց և ուտելիք»:

Գեղեցիկը անտիկ Հունաստանի մտածողների ուսումնասիրության հիմնական առարկաներից մեկն է եղել: Պյութագորասը (մ.թ.ա. VI դ.) և պյութագորականները գտնում էին, որ երկինքը, ողջ տիեզերքը ներդաշնակություն են և թիվ, իսկ գեղեցիկը ներդաշնակության չափն է և արտահայտվում է թվերի որոշակի հարաբերություններով: Համոզված լինելով, որ «ամեն ինչ գեղեցիկ է թվի շնորհիվ», նրանք թիվը, մաթեմատիկական մոտեցումը կիրառեցին գեղեցիկի ուսումնասիրության մեջ, իսկ երաժշտական հարմոնիայի համար գտան կոնկրետ թվային հարաբերություններ:

Հերակլիտեսը (մ.թ.ա. VI դ. վերջ-մ.թ.ա. V դ. սկիզբ) գտնում էր, որ գեղեցիկը հարաբերական է, որովհետև «ամենագեղեցիկ կապիկը այլանդակ է մարդու համեմատությամբ»: Մոկրատեսը նույնպես (մ.թ.ա. 470-399) գեղեցիկը տեսնում էր համեմատության մեջ և այն պայմանավորում նպատակահարմարությամբ և օգտակարությամբ. «գոմաղբով զամբյուղը գեղեցիկ է, եթե այն օգտակար է»:

Գեղեցիկը Պլատոնի (մ.թ.ա. 427–347) բարձրագույն իդեաններից մեկն է։ Այն հետևում է ոչ թե պատմական-հասարակական փորձից, այլ ունի իդեական, հոգևոր սկիզբ։ Նյութական աշխարհի գեղեցիկը՝ կենդանու, մարդկային կերպարանքի, մարդու ստեղծագործության գեղեցկությունը անցողիկ են և հարաբերական։ Այնինչ իսկական գեղեցիկը հավերժ է, անփոփոխ, անհարաբերական, «այն ոչ ծնվում է, ոչ ոչնչանում, ոչ շատանում է, ոչ քչանում, չի կարող մեկ գեղեցիկ լինել, մեկ՝ տգեղ, այստեղ գեղեցիկ լինել, այնտեղ՝ տգեղ, մի բանով գեղեցիկ լինել, մյուսով՝ տգեղ, որոշների համար՝ գեղեցիկ, մյուսների համար՝ տգեղ» /[[118]]/։ Այն Պլատոնի համար հավերժ իդեան է, ինչին խորթ է իրերի հարափոփոխ աշխարհը։

Արիստոտելը (մ.թ.ա. 384–322) գտնում է, որ գեղեցկը ոչ թե օբյեկտիվ իդեան է, ինչպես կարծում է Պլատոնը, այլ իրերի, երևույթների օբյեկտիվ հատկանիշը, որակը։ Այդ հատկանիշների մեջ նա առանձնացնում է մեծությունը, համեմատությունը և կարգը, որոնց ուսումնասիրման համար անհրաժեշտ է դիմել մաթեմատիկային։ Գեղեցիկը ոչ այնքան մեծն է, ոչ էլ այնքան փոքրը, այսինքն՝ գեղեցիկը հանդես է գալիս որպես չափ, իսկ ամեն ինչի չափը մարդն է, որի հետ և պետք է համեմատվեն բոլոր առարկաները։

Միջին դարերում գերիշխում էր այն մոտեցումը, որ գեղեցիկն ունի աստվածային ծագում։ Միջնադարյան մտածողներ Ալբրեխտ Ավգուստինոսը (354–430) և Թոմա Ակվինացին (1226–1274) գեղեցիկի աղբյուրը տեսնում էին Աստծո մեջ։ Զգացական գեղեցիկը և նրանից հաճույք ստանալը եկեղեցու հայրերի կողմից համարվում էր մեղք։

Վերածննդի շրջանում վերականգնվեցին և շարունակվեցին գեղեցիկի պատկերացումների մասին անտիկ շրջանի ավանդույթները: Գեղեցիկ էր համարվում բնությունը, բնականը, նրա ընկալման ուրախությունը, իսկ գեղեցիկի իդեալը մարդն էր և, առաջին հերթին, մարդու մարմինը: Միաժամանակ ընդունվում էր նաև գեղեցիկի հարաբերականությունը, նրա բնորոշման մեջ կարևոր էր համարվում համեմատության դերը: Լուկա Պաչոլին (1445-1517) որպես գեղեցիկի նորմ առաջադրեց ոսկե բաժանումը: Այս շրջանում գեղեցիկը կապվում էր բարոյականի, արդարի և ճշմարտության հետ. «գեղեցիկը հարյուրապատիկ գեղեցիկ է, եթե այն թագադրված է թանկարժեք ճշմարտությամբ», -ասում է Վիլյամ Շեքսպիրը (1564-1616):

Կլասիցիզմի շրջանում գեղեցիկը հանգեցվում է նրբագեղության: Գեղեցիկ է համարվում բնությունը ոչ ամբողջությամբ, իսկ արվեստի նպատակը բնության այդ գեղեցիկի արտացոլումն է, թեև նրա միջոցով գեղեցիկ կարելի է պատկերել նաև տգեղը:

Լուսավորության շրջանում գեղեցիկը դիտվում է որպես բանականությունը և զգացմունքները կապող օղակ: Ֆրանսուա Վոլտերը (1694-1778) գեղեցիկը համարում է բնության առարկաների հատկություն, այնպես, ինչպես կշիռը, գույնը, ծավալը: Դենի Դիդրոն (1713-1784) առանձնացնում է գեղեցիկի երկու տեսակ՝ իրական, օբյեկտիվ գեղեցիկը, որ գոյություն է ունեցել նաև նախքան մարդը, և հարաբերական գեղեցիկը, որ գոյություն ունի միայն մարդու համար: Նա գտնում է, որ գեղեցիկը ճանաչում են ոչ թե բանականությամբ, այլ զգացումով: Յոհան Վինկելմանը (1717-1768) գեղեցիկի էությունը բացատրում է իրերի հատկություններով, նրանց գույնով, համաչափությամբ և ռիթմով: Նա

գտնում է, որ գեղեցիկը արվեստի նպատակն է և կենտրոնը, իսկ նրբագեղությունը ճանաչվում է համապատասխան զգայությամբ, ինչը ձևավորվում և զարգացվում է դաստիարակության և կրթության միջոցով:

Գերմանական դասական փիլիսոփայությունը նոր գաղափարներ մտցրեց գեղեցիկի ընկալման մեջ: Իմանուել Կանտը (1724-1804) գտնում է, որ գեղեցիկի նկատմամբ մարդու վերաբերմունքը միայն հայեցողական է և ոչ գործնական: Նա տարբերում է գեղեցիկը և օգտակարը, ընդգծում է գեղագիտական հետաքրքրության առանձնահատուկ բնույթը և գեղեցիկի բովանդակությունը առանձնացնում է նրա ձևից: Գեղեցիկը միայն այն դեպքում է երևան գալիս, երբ մաքրվում է նյութական բովանդակությունից: Յոհան Հերդերը (1729-1781) գեղեցիկը համարում է բարու արտաքին դրսևորում: Ըստ Ֆրիդրիխ Շիլլերի (1759-1805) գեղեցիկը ազատությունն է, իսկ նրա հիմքը՝ պարզությունը: Նա գեղեցիկի պատկերումը առանձնացնում է գեղեցիկ պատկերումից: Գեորգ Հեգելը (1770-1831) գտնում է, որ գեղեցիկը զգացմունքային երևույթ է, իդեաների զգացմունքային արտահայտում: Նրա համար գեղեցիկը երկրորդական է ճշմարտության համեմատությամբ. ինչքան խորն է մարդը մտածում, այնքան քիչ է նրան անհրաժեշտ գեղեցիկը: Գեղեցիկը առաջին հերթին վերաբերում է արվեստի ոլորտին, իսկ բնության գեղեցիկը նախորդում է դրան:

Ինչպես տեսնում ենք անցյալի մտածողները չունեն միասնական մոտեցում գեղեցիկի հարցում: Պլատոնն ասում էր. «Շատ հեշտ է գեղեցիկի օրինակներ գտնել, բայց շատ դժվար է բացատրել, թե ինչու են դրանք գեղեցիկ»: Վերածննդի շրջանի գերմանացի մեծ նկարիչ Ալբրեխտ Դյուրերը (1471-1528) խոստովանում է. «Ես

չգիտեմ՝ ինչ է գեղեցիկը»։ Կլասիցիզմի խոշորագույն գեղագետներից մեկը՝ Յ. Վինկելմանը գտնում է, որ «Գեղեցկությունը բնության մեծագույն գաղտնիքներից մեկն է։ Այն բոլորս տեսնում և զգում ենք, շատերն են փորձել պատկերացում տալ նրա էության մասին, բայց միշտ՝ ապարդյուն» /[52]/։ Լսենք նաև Լև Տոլստոյին (1828-1910). «Այն հարցը, թե ինչ է գեղեցիկը, առ այսօր մնում է բաց, և գեղագիտական յուրաքանչյուր նոր աշխատության մեջ այն լուծվում է նորովի» /[143]/։

Իրականում դժվար է բացահայտել գեղեցիկի էությունը։ Օրինակ, ի՞նչ նմանություն կա բնության հրաշագեղ տեսարանի, թռչունի ծվլոցի և ծերունուն օգնող երիտասարդի վարմունքի միջև, որոնք բոլորն էլ բնութագրվում են գեղեցիկով։ Բնագետները գտնում են, որ գեղեցիկը օբյեկտիվ օրինաչափություն է, որ ծնվում է բնության ընդերքում, սակայն չեն կարողանում պատասխանել այն հարցին, թե «ինչու աշխարհիկ եթերային գեղեցկուհին դուր չի գալիս գեղջուկին, իսկ փարթամ ու առողջությամբ բուրդոլ գեղջուկին չի գոհացնում նրբանկատ պճնամուլի ճաշակը»։ Հասարակագետները գեղեցիկը համարում են մարդկային ստեղծագործության արդյունք, բայց չեն կարողանում բացատրել իրենց հիացմունքը ծովային կամ լեռնային տեսարանի հանդեպ, ինչը գեղեցիկ է, սակայն մարդկային ստեղծագործության արդյունք չէ։ Ճիշտը, հավանաբար, ոսկե միջինն է. գեղեցիկն ունի ինչպես բնական, այնպես էլ մարդկային, հասարակական հիմք։

Իսկ կա՞ գեղեցիկի գնահատման համար գործնական որևէ հայտանիշ։ Թվում է, թե որպես նման հայտանիշ կարող են ծառայել համաչափությունը, կարգը, պարզությունը, ուժը, շարժումը։ Բայց գեղեցիկը մենք կարող ենք տեսնել նաև անհամաչափության,

քառսի, բարդության և անշարժության մեջ: Իսկապես, եթե ծաղիկը գեղեցիկ է իր թերթերի համաչափությամբ, ծիածանը՝ իր ձևի և գույների կարգով, ալեկոծ ծովը՝ իր ալիքների հզորությամբ, առվակի թշրճոցը կամ ծիտիկի ծլվլոցը՝ իրենց պարզությամբ, ապա նույնքան գեղեցիկ են ծաղիկների դաշտը, գիշերային երկնի աստղերը, ծովի անդորրը՝ իրենց անհամաչափությամբ, անկարգությամբ, անշարժությամբ կամ բարդությամբ:

Իսկ օգտակարությունը: Արդեն ասվեց, որ շումերները և եգիպտացիները գեղեցիկը պայմանավորում էին օգտակարով: Իսկ Սոկրատեսը գեղեցիկը նույնացնում է օգտակարի հետ: Այս միտքը հիմնավորելու համար նա իրավացիորեն գտնում է, որ ոսկով զարդարված վահանը, որ չի կարողանա պաշտպանել զինվորին, չի կարող գեղեցիկ կոչվել: Այսինքն, եթե օգտակար չէ, ապա նաև գեղեցիկ չէ: Սակայն դժվար է այստեղ լիովին համաձայնել Սոկրատեսի հետ, որովհետև այդ դեպքում մենք պետք է ընդունեինք, որ Ջոկոնդան գեղեցիկ չէ, քանի որ դժվար է այն որևէ գործնական նպատակի համար օգտագործել: Միևնույն ժամանակ, կան նաև բազմաթիվ օգտակար բաներ, որոնք դժվար է գեղեցիկ անվանել: Օրինակ, թրիքը օգտակար է, բայց, հավանաբար, այն գեղեցիկ չես անվանի: Կանտը, ընդհակառակը, գեղեցիկի մեջ տեսնում է միայն հոգևոր բնույթ և գեղեցիկ առարկայից հաճույք ստանալու խնդրում անտեսում է նրա գործնական նշանակությունը՝ օգտակարությունը: Սակայն դիզայնի և, ընդհանրապես, կիրառական արվեստի ու ճարտարապետության մեջ գեղեցիկի գնահատականը պայմանավորվում է նաև ստեղծագործության օգտակարությամբ: Մարդու գործունեության մեջ նույնպես նրա կատարած քայլերին տված գեղեցիկի գնահատականը կախված է առաջադրված գործի իրա-

կանացման, նպատակին հասնելու համար այդ քայլերի օգտակարությամբ: Դժվար է, օրինակ, գեղեցիկ անվանել ֆուտբոլիստի շատ դժվար ու բարդ շրջադարձ հարվածը, եթե դրա արդյունքը ինքնագոլն է: Կամ եթե ֆուտբոլիստը, հրաշալի տեխնիկա ցուցադրելով, կարողանում է շրջանցել հակառակորդի մի քանի պաշտպանների ու դարպասապահին, բայց չի կարողանում շատ մոտ տարածությունից գնդակն ուղարկել հակառակորդի անպաշտպան դարպասը, ապա նրա խաղի այդ հատվածը գեղեցիկով չի բնութագրվի:

Իրականում չպետք է առարկայի, երևույթի գնահատման հարցում գեղեցիկը առանձնացնել նրա օգտակարությունից: Մարդու նյութեղեն և հոգևոր կյանքը ապահովող առարկաները և երևույթները գնահատվում են նախ և առաջ իրենց օգտակարությամբ: Սակայն գոյության և տեսակի պահպանման համար օգտակար առարկաների և երևույթների բազմազանության մեջ մարդկային բնագոյները ունեն ընտրության լայն հնարավորություն, ինչն իրականացնում են՝ ելնելով կարգի ու քառսի, համաչափության ու անհամաչափության, շարժման ու անշարժության, պարզի ու բարդի մի գուգորդությամբ, որը բնորոշվում է որպես գեղեցիկ: Եվ ընտրություն կատարելու համար մարդուն տրված գեղեցիկի այդ զգացողությունն է, ճաշակը, որ երիտասարդին հնարավորություն է տալիս իր շրջապատի հազարավոր աղջիկների մեջ գտնել, ընտրել հենց այն մեկին, որ դառնալու է իր երեխաների մայրը: Գեղեցիկի այդ զգացողությունն է, որ արժևորում է մարդու շրջապատը, նրա առարկաներն ու երևույթները, կյանքը ամբողջությամբ:

1848-ի զարնանային ջերմ արևով ողողված մի առավոտ Փարիզում իր կյանքի վերջին պահերն ապրող մեծ բանաստեղծ

Հենրիխ Հայնեն, հավաքելով իր ուժերը, դուրս եկավ հրաժեշտ տալու աշխարհին: Բհարկե, Փարիզը տոն է, սակայն Հայնեի համար այլևս տոն չկար: Նա քայլերն ուղղեց դեպի Լուվր և երկար կանգնեց Վեներայի մարմարյա արձանի դիմաց: Միթե՞ այլևս չեմ տեսնելու այս հրաշքը, -մտածեց բանաստեղծը / [55]: Արդեն հաջորդ դարի սկզբում մյուս արվեստագետը՝ մեծ երգահան Ջիվանին, կյանքին հրաժեշտ տվեց, ասելով՝ «Մի՞թե այլևս չեմ լսելու Շիրինի երգերը»: Երկու արվեստագետներն էլ կյանքի արժևորումը, նրա կորստի դառնությունը պայմանավորում են գեղեցիկով, նրանից բաժանվելու դժվարությամբ և, կարծես, հաստատում Ֆյոդոր Դոստոևսկու խոսքերը՝ «Առանց գեղեցիկի մարդը, հավանաբար, չէր ուզի ապրել այս աշխարհում»:

2. Բովանդակային ընդհանրություններ

Քանի որ չկա գեղեցիկի միասնական ընկալում, ապա բնական կլինի մաթեմատիկայի և գեղեցիկի փոխհարաբերության հարցի քննարկումն սկսել նրանց բովանդակային ընդհանրություններից. գեղեցիկին տրված տարբեր բնութագրումներից որո՞նք են, որ կարելի է տալ նաև մաթեմատիկային:

Եթե հետևենք շումերներին, եգիպտացիներին ու Սոկրատեսին և ընդունենք սոկրատեսյան՝ «գեղեցիկը առավել օգտակարն է» սկզբունքը, ապա վստահաբար համանման դեր կարելի է վերապահել նաև մաթեմատիկային: Շումերական և եգիպտական մաթեմատիկան արդեն ամբողջությամբ նպատակաուղղված էր օգտա-

կարին: Չնայած այն բավականին զարգացած էր, բայց պատասխանում էր միայն «ինչպե՞ս» հարցադրմանը, և ապացուցողական որևէ խնդիր և «ինչո՞ւ» հարցադրում այնտեղ չկար. մաթեմատիկական ուներ զուտ կիրառական նշանակություն: Եվ հետագայում նույնպես, թեպետ և այն դարձավ մարդկության առջև ծառացած այդ «ինչո՞ւ» հարցադրման ամենահիմնավոր պատասխանը գտնելու ճանապարհներից մեկը, մարդկության պատմությունը, նրա բարեկեցությունն ապահովող գիտատեխնիկական հետագա ողջ առաջընթացը անհնար է պատկերացնել առանց մաթեմատիկայի կիրառության: Հետևաբար, անվիճելի է նաև մաթեմատիկայի գնահատումը որպես օգտակարի, և սոկրատեսյան բնութագրմամբ այն պետք է ընկալել որպես գեղեցիկ:

«Ամեն ինչ գեղեցիկ է թվի շնորհիվ» պյութագորասյան բանաձևը հաստատվեց գիտության զարգացման ողջ ընթացքում՝ աշխարհակառույցի ու նրանում տեղի ունեցող երևույթների ներդաշնակության մեջ թվի և ողջ մաթեմատիկայի էական մասնակցությամբ, իսկ գեղեցիկի հիմքում համաչափության ու ոսկե բաժանման և երաժշտական հարմոնիայի հիմքում պյութագորասյան գամմայի առկայությունը, ցույց են տալիս, որ Աստված ոչ միայն «բնության ոսկե գիրքը գրել է մաթեմատիկայի լեզվով» /Գալիլեյո Գալիլեյ (1564-1642)/, այլև այդ գիրքը գեղեցիկ լեզվով և գեղեցիկ է գրել:

Եթե հետևելու լինենք Սոկրատեսի մյուս՝ գեղեցիկի որպես համեմատության բնութագրմանը, ապա համեմատությունը մաթեմատիկայի կազմավորման հիմնական մոտիվներից մեկն է: Այս տեսակետից համեմատությունը մաթեմատիկայում հանդես է գալիս ինչպես հավասարության և անհավասարության առանցքա-

յին առնչությունների ու ամենաբազմազան բանաձևերի տեսքով, այնպես էլ որպես մաթեմատիկական չափի հիմնական միջոց: Միևնույն ժամանակ, մաթեմատիկան տալիս է այդ համեմատության գեղագիտական բնութագիրը՝ ոսկե բաժանման տեսքով:

Մաթեմատիկան՝ հասկացությունների, դատողությունների և մտահանգումների իր երևակայական համակարգով, լիովին համահունչ է գեղեցիկի իդեական, տարածությունից, ժամանակից ու սուբյեկտից անկախ լինելու պլատոնյան մեկնաբանությանը: Իսկապես, մաթեմատիկական օբյեկտները իրականության մեջ գոյություն չունեն. մենք չենք կարող ցույց տալ թիվը, կետը, եռանկյունը. մաթեմատիկան գիտություն է իրականության մեջ գոյություն չունեցող առարկաների մասին, այն գիտություն է ոչ թե իրերի, այլ իդեաների մասին: Միևնույն ժամանակ, այդ իդեաները՝ եռանկյունը, քառանկյունը, թիվը գոյություն ունեն բոլոր ժամանակներում և ամենուրեք, ցանկացած մարդուց անկախ. վերջինիս մնում է միայն դրանց մասին մտածել: Ավելին, դրանք մեկնաբանվում են շրջակա աշխարհի զանազան առարկաների և երևույթների տեսքով, բայց այդ առարկաներն ու երևույթները, ինչպես իրական աշխարհում ամեն ինչ, հարափոփոխ են, իսկ մաթեմատիկական առարկաները՝ անփոփոխ:

Մաթեմատիկան համահունչ է նաև գեղեցիկի արիստոտելյան բնութագրումներին: Իսկապես, մի⁹ թե մաթեմատիկական հասկացությունների միջև եղած անսպասելի ու խորը կապերի հայտնաբերումը կամ իմացությունը, դրանց ապացուցումներում առկա մտքերի կուռ և հետևողական հիլրերթյան շղթան կամ գենցենյան հրաշալի ծառը, մաթեմատիկական տեսությունների /կամ դրանց հատվածների/ հոյակերտ ճարտարապետության հետ ծանոթա-

ցումը, որն ավելի խորն է, ավելի բարձր ու ավելի բարդ, քան ճարտարապետական ցանկացած կառույց, մարդկային հոգուն չեն բերում բերկրանքի այն գերագույն զգացումը, որ Արիստոտելը անվանում է բանական հաճույք և վերագրում է արվեստին: Մաթեմատիկան բավարարում է նաև գեղեցիկի՝ մեծության, համեմատության և կարգի մեջ լինելու արիստոտելյան բնութագրմանը, որովհետև այն հաստատում է կարգ և ստեղծում է իրերի համեմատության և մեծությունների չափման հնարավորություն, ինչը նշում է նաև Արիստոտելը:

Գեղեցիկի աստվածային բնույթի մասին միջնադարյան պատկերացումները նույնպես համահունչ են մաթեմատիկայի մասին տարբեր ժամանակներում ձևավորված պատկերացումներին: Վաղ միջնադարում Ավրելիոս Ավգուստինոսը կարծես երկրորդում է գեղեցիկի մեջ մաթեմատիկայի ունեցած դերի մասին անտիկ շրջանի հունական պատկերացումները, երբ ասում է. «Ոչինչ դուր չի գալիս, բացի գեղեցիկից, գեղեցիկի մեջ՝ ոչինչ, բացի ձևից, ձևի մեջ՝ ոչինչ, բացի համեմատություններից, համեմատությունների մեջ՝ ոչինչ, բացի թվից» /45/: Սակայն, ինչպես նշվեց վերևում, քրիստոնեական միջնադարը գեղեցիկը պայմանավորում էր նրա աստվածային էությամբ: Իսկ արդյո՞ք կապ ունի մաթեմատիկական գեղեցիկի նման ընկալման հետ: Եվ այսպես՝ մաթեմատիկան և Աստված:

Դեռևս Պյութագորասն էր պնդում, որ բնության մասին Աստծո ստեղծած օրենքները մաթեմատիկական են: Եվ աշխարհակառույցի մեջ թվին ու, ընդհանրապես, մաթեմատիկային Աստծո կողմից վերապահված հիմնարար դերի մասին Պյութագորասի, Պլատոնի, հետագայում՝ Գալիլեյի և այլոց մտքերը ամփոփում է

Գոթֆրիդ Լայբնիցը (1646-1716), երբ գրում է՝ «Աստված աշխարհն արարում է այնպես, ինչպես որ հաշվում է»: Եվ, չբավարարվելով սրանով, նա ավելացնում է՝ «Երկրաչափությունն ինքը Աստվածն է ... և հանդես է գալիս որպես նրա նախապատկեր աշխարհի կառուցման ընթացքում»/[96]: Իսկ Իսահակ Նյուտոնը (1642-1727) այնքան էր զարմացած ֆիզիկական երևույթները մաթեմատիկայի լեզվով գրելու հնարավորությամբ, որ դա համարեց Աստծո գոյության ապացույց: Նման մոտեցումն էր, որ այդ և ավելի վաղ շրջանի մտածողներին /առանձնապես՝ մաթեմատիկոսներին/ հնարավորություն տվեց իրենց ուսումնասիրությունները ներկայացնել որպես Աստծո մտահղացումների որոնում և զերծ մնալ ինկվիզիցիայի հետապնդումներից:

Հետևելով Լայբնիցին՝ արդեն քսաներորդ դարի նախաշեմին, Դավիթ Հիլբերտը (1862-1943) բնության երևույթների և մաթեմատիկական տեսությունների միջև կապն անվանում է «նախաստեղծ ներդաշնակություն»: Ալբերտ Էյնշտեյնը (1879-1955) այդ կապի իմացությունը նմանեցնում է «փնչ-որ տիեզերական կրոնի հետ առնչվելու և նրան պատկանելու զգացումի», իսկ նոբելյան մրցանակակիր Մաքս ֆոն Լաուեն (1879-1960) այն անվանում է «աստվածային հայտնություն»:

Մաթեմատիկայի ներքին կառուցվածքը իր էությամբ նույնպես նման է աստվածային կառույցի: Դա, առաջին հերթին, պայմանավորված է մաթեմատիկական փաստերի անձեռակերտ ստեղծագործությամբ: Իսկապես, մաթեմատիկական շատ փաստեր հաճախ հայտնաբերվել են տարբեր տեղերում և տարբեր հեղինակների կողմից, երբեմն տարբեր ձևերով, սակայն միշտ ունեցել են միևնույն բովանդակությունը: Այսինքն՝ մաթեմատիկական

գոյություն ունի մարդուց, սուբյեկտից անկախ: Իսկ մարդու դերը, մարդկային ստեղծագործությունը այն գտնելն է, հայտնաբերելը: Նյու-Յորքի համալսարանի պրոֆեսոր Մորիս Քլայնը (1908-1992) մաթեմատիկայի այս հատկությունը ընդունում է որպես արտաքին աշխարհի գոյության ապացույց /[85]/:

Սակայն աստվածայինի հետ մաթեմատիկայի առնչությունների տեսակետից ավելի զարմանալի ու նշանակալից է մաթեմատիկայի ընդհանուր ճարտարապետական կառույցի մեջ որոշ անհասկանալի ու հակասական դրույթների առկայությունը, դրույթներ, որոնք ունեն Աստծո գաղափարի հակասականության հետ կապված հայտնի դատողությունների հետ անմիջական աղերսներ: Եվ խոսքը այստեղ Պյութագորասի կողմից հատվածների անհամաչափելիության «հակասության» հայտնաբերման մասին չէ, «հակասություն», որը սասանեց Պյութագորասի հավատը բնական թվերի ամենագործության վերաբերյալ, սակայն արդյունք էր նրա կողմից մաթեմատիկական կառույցի ոչ լիարժեք իմացության: Եվ ոչ էլ Ջենոնի /Ջենոն Էլիացի, մ.թ.ա. 490-430/ ապորիաների մասին է, որոնք «ապացուցում էին» շարժման անհնարինությունը կամ նրա չափազանց սուբյեկտիվ մեկնաբանության հնարավորություն էին ստեղծում, որոնց էլ տարբեր փիլիսոփայական դպրոցների կողմից տրվեցին տարբեր, սակայն ոչ միասնական և, առ այսօր, վիճելի լուծումներ: Խոսքը այստեղ բազմությունների նախվ տեսության և նրա բերած հակասությունների մասին է:

Բազմությունների տեսությունը սկզբնավորվեց տասնիններորդ դարի յոթանասունականներին, գերմանացի մաթեմատիկոս Գևորգ Կանտորի (1845-1918) կողմից, շատ արագ լայն կիրառություն գտավ մաթեմատիկայի մեջ՝ հավակնելով և, ի վերջո, դառ-

նալով այն միավորող և նրա հիմքում ընկած առանցքային գաղափար և տեսություն: Սակայն արդեն դարի վերջում սկսվեցին հայտնաբերվել բազմության գաղափարի և այդ տեսության հակասականությունը ցույց տվող դրություններ /պարադոքսներ/, որոնցից որոշները ունեին նաև իրենց փիլիսոփայական նմանակները: Դրանցից մեկը, որ 1902 թվականին հանրությանը ներկայացրեց անգլիացի մաթեմատիկոս և փիլիսոփա Բերթրան Ռասելը (1872-1970), ապշեցնում է իր պարզությամբ. S-ով նշանակենք բոլոր այն և միայն այն բազմությունների բազմությունը, որոնք իրենք իրենց տարր չեն հանդիսանում, այդ դեպքում կունենանք հետևյալ հակասական դատողությունները՝ եթե S-ը պատկանում է S-ին, ապա, համաձայն S-ի սահմանման, S-ը չի պատկանում S-ին, քանի որ այն բաղկացած է միայն այն բազմություններից, որոնք իրենք իրենց տարր չեն հանդիսանում: Իսկ եթե ենթադրենք, որ S-ը չի պատկանում S-ին, ապա նորից, համաձայն S-ի սահմանման, S-ը պատկանում է S-ին, քանի որ S-ը կազմված է իրենք իրենց համար տարր չհանդիսացող բազմություններից:

Ռասսելի այս պարադոքսը, ըստ էության, Աստծո գաղափարի շուրջ հյուսված հետևյալ փիլիսոփայական պարադոքսի մաթեմատիկական վերաձևակերպումն է /[86], [153]/: «Աստված կարող է ստեղծել մի քար, որը տեղից չի կարող շարժել, կամ Աստված չի կարող ստեղծել մի քար, որ չի կարող տեղից շարժել»: Որպես արքիոմ ընդունենք նաև այն դրույթը, որ Աստված ամենակարող է: Պարադոքսի մեջ արված առաջին դատողությունը նշանակում է, որ կա գործողություն, որն Աստված չի կարող կատարել, այսինքն՝ հակասում է մեր ընդունած արքիոմին: Երկրորդ դատողությունը նշանակում է, որ Աստված ինչ-որ բան չի կարող ստեղծել,

այսինքն՝ դարձյալ ինչ-որ գործողություն չի կարող կատարել, այսինքն՝ ամենակարող չէ. դարձյալ ստացանք հակասություն արքսիոմի հետ: Այսպիսով, մեր ընդունած արքսիոմի պայմաններում ստացանք դատողություն, որի ինչպես ճշմարիտ, այնպես էլ կեղծ լինելը հանգեցնում են հակասության այդ արքսիոմի հետ: Սա Ռասելի պարադոքսի փիլիսոփայական անալոգն է:

Ռասելի պարադոքսը ցույց է տալիս, որ մենք երբեմն պետք է հրաժարվենք առաջին հայացքից պարզ թվացող որոշ հատկություններից: Նման հատկություն է, օրինակ, ամենակարող լինելու հատկությունը, որ վերագրում ենք Աստծուն: Մաթեմատիկայում այս գաղափարի իրագործումը շատ ավելի դժվար էր, և այն հանգեցրեց բազմությունների արքսիոմատիկ տեսության և մաթեմատիկական տրամաբանության ստեղծմանը: Սակայն դրանով հակասությունները չհաղթահարվեցին: Ավելին, 1931 թվականին ավստրիացի մաթեմատիկոս Կուրտ Գյոդելը (1906-1978) ապացուցեց, որ յուրաքանչյուր շատ թե քիչ բովանդակալից ֆորմալ տեսություն լրիվ չէ, այսինքն՝ պարունակում է այնպիսի պնդում, որը այդ տեսության շրջանակներում հնարավոր չէ ոչ ապացուցել, ոչ էլ հերքել /([86]): Սա նշանակում է նաև, որ մեր կառուցած տեսությունը ինչքան էլ հարուստ լինի, չի կարող նկարագրել ողջ բնությունը /կամ Աստծո մտադրությունը/:

Բնության և բնականի նկատմամբ Վերածննդի շրջանի գեղագիտական մտահղացումները իրագործվեցին մաթեմատիկայի գործուն մասնակցությամբ: Դա է հաստատում նաև մեծ Գալիլեյի վերը մեջբերված խոսքը. «Բնության ոսկե գիրքը գրված է մաթեմատիկայի լեզվով...»: Արվեստի և մաթեմատիկայի զարգացման հետագա ողջ ընթացքը հաստատեց Գալիլեյի այդ մարգարեու-

թյունը: Վերածնունդը նաև արվեստի մեջ մաթեմատիկայի կիրառության աննախընթաց մի շրջան է, որի պսակը կազմում են համեմատությունների, մասնավորապես, ոսկե բաժանման կիրառությամբ Լեոնարդո դա Վինչիի (1452-1519), Դյուրերի և այդ շրջանի գեղանկարչության մյուս վարպետների ստեղծած գլուխգործոցները:

Հանդիսանալով նաև ճշմարտության բացահայտման կարևորագույն միջոցներից մեկը և իր դրսևորմամբ մշտապես արտահայտելով արդարը՝ մաթեմատիկան ցույց է տալիս իր հարազատությունը բարոյական և ճշմարտական հիմնարար արժեքների հետ գեղեցիկի կապի մասին Վերածննդի շրջանի ընկալումներին և, միաժամանակ, գեղեցիկի հետ իր անխզելի կապերով նոր երանգ է հաղորդում դրանց:

Ինչպես նշվեց, կլասիցիզմի հիմքում ընկած է ռացիոնալիզմը, որը սկիզբ է առնում Ռենե Դեկարտի (1596-1650) փիլիսոփայական գաղափարներից: Իսկ մաթեմատիկան ռացիոնալիզմի կամ բանականության ամենացայտուն դրսևորումներից մեկն է և, հետևապես, կլասիցիզմի տեսակետից առնչվում է գեղեցիկի ընկալման հետ: Արժե նշել նաև, որ նրբագեղությունը, ինչին հանգում է գեղեցիկը՝ ըստ կլասիցիզմի, մաթեմատիկայում առնչվում է անընդհատության և անվերջ փոքրի գաղափարների հետ, որոնք դիտարկվում են դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվներում: Իսկ վերջիններս, թեև ստեղծվել են Նյուտոնի և Լայբնիցի կողմից, դարձյալ սկիզբ են առնում Դեկարտի՝ այս անգամ արդեն մաթեմատիկական գաղափարներից:

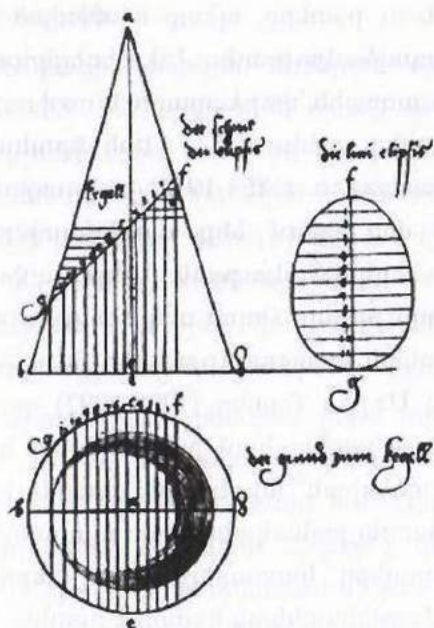
Լուսավորության և հետագա շրջաններում գեղեցիկի մասին պատկերացումները չափազանց լայն են ու բազմազան: Սակայն

դրանցում կարելի է նկատել այնպիսի բնորոշումներ, որոնք առկա են նաև մաթեմատիկայում: Այսպես, օրինակ, լուսավորության շրջանի գերմանական մեծագույն փիլիսոփա Ի. Կանտը գեղեցիկի վերլուծությունը կատարում է ըստ հարաբերության, որակական, քանակական և եղանակային հատկանիշների, որոնք ինչ-որ իմաստով բնութագրական են նաև մաթեմատիկայի համար: Գեղեցիկի որակական հայտանիշն, օրինակ, արտահայտվում է նրանում, որ այն դուր է գալիս առանց գործնական, օգտապաշտական հետաքրքրության կամ նշանակության: Այս հայտանիշով առանձնանում է նաև մաթեմատիկան: Իսկապես, մաթեմատիկական շատ խնդիրներ նման համընդհանուր հետաքրքրություն են ներկայացնում, և դրանց լուծման գործընթացը մարդու մոտ ընթանում է ինքնաբերաբար՝ հաճույք պատճառելով լուծողին: Ավելին, ինչպես նշում է հանրահայտ մաթեմատիկոս Ջոն Ֆոն Նեյմանը (1903-1953), «մաթեմատիկան հիմնականում զարգանում է գեղագիտական մոտիվների շնորհիվ»:

§2. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԳԵՂԵՑԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Մաթեմատիկան ավելին է, քան
գիտությունը. այն լեզու է:

Նիլս Բոր



Ալբրեխտ Դյուրեր,

Էլիպսի կառուցումը որպես կոնական հատույթ, 1525

1. Մաթեմատիկան՝ գիտությունների թագուհի

Անգլիացի մաթեմատիկոս Գոդֆրի Հարդին (1877-1947) այսպես է բնութագրում գեղեցիկի հետ մաթեմատիկայի առնչությունը. «Մաթեմատիկոսի ստեղծագործությունը նույն չափով գեղեցիկ է, ինչքան նկարչի կամ բանաստեղծի ստեղծագործությունը, նրա մտքերը, ինչպես և ներկերն ու բառերը, պետք է օժտված լինեն ներքին հարմոնիայով, ներդաշնակությամբ: Եվ գեղեցկությունը մաթեմատիկական մտքերի առաջին փորձաքարն է. աշխարհում այլանդակ մաթեմատիկան տեղ չունի» /^[154]/: Իսկ ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Անրի Պուանկարեն (1854-1912) ավելացնում է. «Մենք որոշակիորեն մեր մեջ կրում ենք մաթեմատիկական գեղեցիկի, թվերի և ձևերի ներդաշնակության, երկրաչափական նրբագեղությունների զգացողությունը: Բոլոր այդ զգացողությունները իսկական գեղագիտական զգացողություններ են» /^[121]/: Ամերիկացի մաթեմատիկոս Մորիս Բլայնը (1908-1992) գրում է. «Երաժշտությունը կարող է վեհացնել կամ խաղաղեցնել հոգին, կերպարվեստը՝ շոյել աչքը, պոեզիան՝ արթնացնել զգացմունքներ, փիլիսոփայությունը՝ բավարարել բանականության պահանջները, ճարտարագիտական աշխատանքը՝ կատարելագործել մարդկանց կյանքի նյութական կողմը: Մաթեմատիկան կարող է հասնել բոլոր այդ նպատակներին միաժամանակ» ([85]): Իսկ Բերթրան Ռասելը մաթեմատիկական գեղեցիկը բնութագրում է այսպես. «Մաթեմատիկան տիրապետում է ոչ միայն ճշմարտությանը, այլև բարձրագույն գեղեցիկին: Հղկված ու խիստ, վեհորեն մաքուր և կատարյալին ձգտող նման գեղեցկությունը հատուկ է միայն արվեստի մեծագույն ստեղծագործություններին» /^[123]/:

Սակայն գեղեցիկը առկա է ոչ միայն մաթեմատիկայում, այլ նաև գիտություններից յուրաքանչյուրի մեջ, և դրանք հաճախ չեն զիջում մաթեմատիկայում առկա գեղեցիկին: Այդ դեպքում ինչո՞ւ է բոլոր գիտությունների մեջ հենց մաթեմատիկային հատկացվում «առաջին գեղեցկուհու» դերը, ինչո՞ւ է մաթեմատիկայի «արքա» Կարլ Գաուսը (1777-1855) մաթեմատիկան համարում գիտությունների թագուհի:

Դանիացի ֆիզիկոս, նոբելյան մրցանակի դափնեկիր Նիլս Բորը (1885-1962) գտնում է, որ «Մաթեմատիկան ավելին է, քան գիտությունը. այն լեզու է»: Սակայն մաթեմատիկական լեզուն առանձնանում է սովորական լեզուներից: Եթե նորից հիշենք մեծ Գալիլեյի խոսքերը՝ «Բնության լսկե գիրքը գրված է մաթեմատիկայի լեզվով ...», ապա պարզ կդառնա, որ առանց այդ լեզվի իմացության բնության իմացությանն ուղղված յուրաքանչյուր գիտություն չի կարող հասնել մեծ հաջողությունների:

Յուրաքանչյուր բնական լեզու /օրինակ, հայերենը/ ունի իր այբուբենը՝ ոչ մեծ թվով նշանների կամ տառերի բազմություն /հայերենում դրանք 39 հատ են/: Այդ տառերի որոշ վերջավոր հաջորդականությունների միջոցով կազմվում են տվյալ լեզվի բառերը, որոնք արտահայտում են բնության առարկաները, նրանց հատկություններն ու փոխհարաբերությունները: Յուրաքանչյուր բնական լեզու ունի բառերի հարուստ պաշար, որ սովորաբար ամփոփվում է այդ լեզվի բառարաններում: Հայոց լեզվի որոշ բառարաններում, օրինակ, զետեղված են մինչև հարյուր հազար բառեր: Բառերը կազմում են լեզվի հիմքը: Նրանց միջոցով, քերականական հատուկ կանոնների օգնությամբ կազմվում են նախա-

դասությունները, իսկ նախադասությունների միջոցով՝ մեր խոսքը կամ մեր մտքերը:

Ո՞րն է բնական լեզվի հիմնական հմայքը և գեղեցկությունը: Բառերի, նախադասությունների ու մտքերն արտահայտող բանավոր կամ գրավոր խոսքի միջոցով լեզուն կարողանում է արտահայտել իրական աշխարհի առարկաները, դրանց հատկություններն ու փոխհարաբերությունները: Սա թույլ է տալիս, օրինակ, մեկ գրքի մեջ ամփոփել մարդու կյանքի, ժողովրդի կամ աշխարհի պատմությունը: Ինչպես անգլիացի մեծ իմաստասեր Ֆրենսիս Բեկոնն (1561-1626) է ասում՝ «Գրքերը մտքերի նավերն են, որոնք թափառում են ժամանակի ալիքների վրայով և իրենց թանկարժեք բեռը հոգատարությամբ տանում սերնդեսերունդ» /46/: Գրքերի ու մտքերի այս թոփչքը անհամեմատ ավելի գեղեցիկ է, քան մարդկային մտքի մեծագույն նվաճումներից մեկի՝ ինքնաթիռի թոփչքը: Իսկ ինքնաթիռի թոփչքի գեղեցկությունը պայմանավորված է նախ և առաջ նրա հուսալիությամբ: Եվ այդ հուսալիությունը ապահովվում է առաջին հերթին մաթեմատիկայի միջոցով. ինքնաթիռի շարժման հիմքում ընկած մեխանիկական և տեխնիկական բոլոր հաշվարկները, օրինակ, իրականացվում են մաթեմատիկայի միջոցով:

Տարիներ առաջ Երևանի դպրոցներից մեկի յոթերորդ դասարանում տնօրենի և բազմաթիվ ուսուցիչների մասնակցությամբ ես մաթեմատիկայի փորձնական դաս էի վարում ապացուցելու համար, որ մաթեմատիկայի դասավանդման նպատակը ոչ միայն և ոչ այնքան աշակերտներին մաթեմատիկա սովորեցնելն է, որքան արժեքներ /մասնավորապես՝ գեղագիտական արժեքներ/ ձևավորելը և դրա համար մաթեմատիկայի կրթական ներուժը բացահայ-

տելն ու օգտագործելը: Ես գրատախտակին գրեցի երեք դատողություն. «Խնձորը համով է», «Ես սիրում եմ մայրիկիս», «Մեկը փոքր է երկուսից» և կատարեցի հետևյալ հարցադրումը. «Ինքնաթիռի շարժման հիքմում ընկած է այս դատողություններից մեկը: Ուսենք երեք դեպք: Ո՞ր դեպքում դուք կնստեք այդ ինքնաթիռը»: Երեխաները սկզբում ցուցաբերեցին զգացմունքային մոտեցում և նախընտրեցին առաջին երկու դատողությունները: Սակայն երբ հասկացան, որ առաջադրված խնդրում հիմնական նպատակին հասնելու համար կարևորը հուսալիությունն է, սկսեցին քննարկել դատողությունների ճշմարտացիության հարցը և, ի վերջո, բոլորը կանգնեցին երրորդ դեպքի վրա:

Իսկ ինչքանո՞վ են հուսալի մեր մտքերի ամենօրյա ու անդադար ընթացքն ու թոփաքը, որ ապահովում են մեր կենսագործունեությունը և իրականացվում մեր լեզվի միջոցով: Այնքանով, ինչքանով հուսալի են մեր դատողություններն ու մտահանգումները: Իսկ դրանց հուսալիության բանալին դարձյալ տալիս է մաթեմատիկան:

Մաթեմատիկական լեզուն ունի կուռ, տրամաբանական կառուցվածք, որի պատճառով նրա դրույթներն ու հայտնագործությունները կասկածի տակ չեն առնվում: Եվ, ինչպես նշում է Լեոնարդո դա Վինչին, «Մարդկային ոչ մի հետազոտություն չի կարող իսկական գիտություն համարվել, եթե այն չի հաղթահարել մաթեմատիկական ապացուցման փորձությունը» /([53]): Ալբերտ Էյնշտեյնն էլ ավելացնում է. «Բոլոր գիտությունների մեջ մաթեմատիկան արժանանում է հատուկ հարգանքի, որի համար հիմք է ծառայում այն, որ մաթեմատիկայի դրույթները բացարձակ ճշմարիտ են ու անվիճելի, մինչդեռ մյուս գիտությունների դրույթ-

ները շատ կողմերով վիճելի են, և միշտ կա այլ հայտնագործությունների միջոցով դրանց հերքման վտանգը»։ Ավելին, ՌԴ ԳԱ ակադեմիկոս Ս. Լ. Սոբոլևը էլ գտնում է, որ «Կա մի գիտություն, առանց որի հնարավոր չէ ոչ մի այլ գիտության գոյություն։ Դա մաթեմատիկան է։ Նրա հասկացությունները, նշանները և ներկայացումները կազմում են մի լեզու, որով խոսում են, գրում և մտածում մնացած գիտությունները։ Այն բացատրում է բնության բարդ երևույթների ներքին օրինաչափությունները, դրանք հանգեցնում պարզ երևույթների։ Այն կանխատեսում է և նախապես հաշվում իրերի հեռավոր ընթացքը»։

Մաթեմատիկայի լեզուն. ահա մաթեմատիկայի գեղեցկության հիմնական աղբյուրը, ինչը և նրան հնարավորություն է տվել ստանալու «գիտությունների թագուհու» տիտղոսը։ Եվ եթե գիտությունը իր հարցերը կարողանում է ձևակերպել մաթեմատիկայի լեզվով, ապա այն ապահովում է ոչ միայն ստացված արդյունքների հավաստիությունը, այլև կարողանում է օգտվել մաթեմատիկական հզոր լեզվի ստեղծած ողջ զինանոցից և դրանք նպատակաուղղել առաջադրված հարցերի լուծմանը։

Ժամանակին Կարլ Գաուսին համաշխարհային հռչակ բերեց մոլորակների հետազոծերի հաշվման համար առաջադրած մեթոդը։ Այդ մեթոդի կիրառման շնորհիվ հնարավոր եղավ նորից գտնել Ցերերա փոքրիկ մոլորակը, որ «կորել» էր Ջ. Պիացիի հայտնաբերումից անմիջապես հետո։ Նման ձևով է հայտնաբերվել նաև Նեպտունը. ֆրանսիացի Ուրբեն Լեվերյեն (1811-1877) իր հետազոտության արդյունքները 1846-ին հանձնեց Բեռլինի ակադեմիա, որի հիման վրա գերմանացի աստղագետ Յոհան Հալլեն (1812-

1910) կոնկրետ դիտումներով անմիջապես հայտնաբերեց Նեպտունը և ցույց տվեց նրա տեղը երկնականարում:

Այս երկու հայտնագործությունները բավական են՝ ցույց տալու համար մաթեմատիկական լեզվի հզորությունը, նրա ուժը, որ թույլ է տալիս կաբինետային խաղաղության մեջ նստած՝ կատարել հարյուրհազարավոր, միլիոնավոր կիլոմետրերի հեռավորության վրա գտնվող առարկաների, երևույթների ու նրանց հատկությունների աներևակայելի հայտնագործություններ:

Սա նաև մարդկային ոգու հաղթանակն է: Եվ ինչպես նշում է հանրահայտ փիլիսոփա և մաթեմատիկոս Ալֆրեդ Ուայդհեթը (1861-1947), «Զուտ մաթեմատիկական գիտությունը կարելի է ներկայացնել որպես մարդկային ոգու ամենահինքնատիպ դրսևորում: Այդ կոչման մյուս հավակնորդը երաժշտությունն է» /145/:

2. Մաթեմատիկական կամ գիտական գեղեցիկը

Մենք ընդհանուր կողմերով արդեն անդրադարձանք գեղեցիկի հետ մաթեմատիկայի բովանդակային ընդհանրություններին, մաթեմատիկայի մեջ գեղեցիկի դրսևորման զանազան կողմերին: Սակայն մաթեմատիկական գեղեցիկի հետ ունի նաև առավել խորքային կապեր, որոնք որոշակի գեղագիտական հմայք են հաղորդում նրան: Ավելին, «Մաթեմատիկան իր մեջ ներառում է ... գեղագիտական կատարելության ձգտող գծեր» /92/:

Մյուս կողմից, մաթեմատիկան լայնորեն մասնակցում է գեղանկարչության, ճարտարապետության, երաժշտության և արվեստի

տի այլ ոլորտների մեջ: Ավելին, վստահաբար կարելի է ասել, որ առանց մաթեմատիկայի նույնիսկ անհնար է արվեստի շատ ոլորտներում ստեղծագործության իրականացումը: Այսինքն՝ մաթեմատիկան հանդես է գալիս նաև որպես արվեստի ստեղծագործությունների կազմավորման բաղադրիչ, ինչը նույնպես հաստատում է գեղեցիկի առկայությունը մաթեմատիկայում:

Իսկ ո՞րն է գեղեցիկը մաթեմատիկայում:

Նախապես հարկ է նշել, որ «գեղեցիկ թեորեմ», «գեղեցիկ ապացուցում», «գեղեցիկ խնդիր» և մաթեմատիկային ու նրա առանձին հատվածներին վերագրվող գեղեցիկի այս և այլ բնորոշումներ ունեն խորքային տարբերություններ արվեստի ստեղծագործություններին կամ բնության տեսարաններին տրվող գեղեցիկի բնորոշումներին:

Իսկապես, դուք կարող եք լսել ու լսել ձեր սիրած երգը, գմայլվել բնության տեսարանով և դժվարությամբ կտրվել նրանից, էնգրի «Հարեմը» Լուվրում մի անգամ դիտելուց հետո հավանաբար այն նորից դիտելու ցանկություն կունենաք: Այսինքն՝ արվեստի, բնության գեղեցիկը ունի ձգելու հատկություն, ինչը ավելի է ուժեղանում գեղեցիկի առարկայի հետ շփման արդյունքում: Բնության մեջ գեղեցիկը ավելի նշանակալից է դարձնում այն կրող առարկան կամ երևույթը: Մեր սիրելի վայրերը, աղբյուրի քչքչոցը, արևածագը տեսնելուց մենք երբեք չենք ձանձրանում: Ընդհակառակը, յուրաքանչյուր հանդիպում ավելի գեղեցիկ ու ավելի ցանկալի է դարձնում դրանք, և մենք ձգտում ենք նոր հանդիպումների: Այդպես է նաև արվեստում. արվեստի գործի գեղագիտական արժեքը պայմանավորված է նաև նրա հետ շփվելու պահանջով, եթե գեղանկարը մեկ-երկու անգամ դիտելուց հետո այլևս չի ձգում,

ավելին՝ նույնիսկ ձանձրացնում է, ապա վստահաբար նրանում բացակայում է անհրաժեշտ գեղագիտական արժեքը: Նույնն է նաև երաժշտության և արվեստի այլ գործերի պարագայում:

Այլ է պատկերը մաթեմատիկայի և, ընդհանրապես, գիտության պարագայում: Գեղեցիկ թեորեմն ու գեղեցիկ ապացուցումը իրենց նկատմամբ հետաքրքրությունը պահպանում և ձգում են այնքան ժամանակ, քանի դեռ դրանք չեն հայտնաբերվել կամ իմացվել: Հայտնաբերումից կամ իմացումից հետո կտրուկ նվազում կամ վերանում է դրանց նկատմամբ հետաքրքրությունը: Անգամ ամենահետաքրքրաշարժ խնդիրը, որի շուրջ մարդը կարող է օրերով մտածել, լուծելուց հետո այլևս չի հետաքրքրում կամ շատ քիչ է հետաքրքրում նրան:

Գիտական գեղեցիկը երևույթի, օրինաչափության հայտնաբերման մեջ է, որից հետո այդ գեղեցիկը չի մնում և հայտնաբերող գիտնականին այլևս չի թողնում հայտնաբերված տեղում, այլ տանում է առաջ՝ դեպի ճշմարիտի դրսևորման նոր հորիզոններ, դեպի առարկաների և երևույթների միջև առկա նոր օրինաչափությունների և ներդաշնակությունների հայտնաբերում: Միաժամանակ, այդ նոր հորիզոնների, օրինաչափությունների և ներդաշնակությունների հայտնաբերումը անհնար է առանց արդեն իմացած գիտելիքի օգտագործման, ինչը այդ գիտելիքին հաղորդում, տալիս է նոր արժեք, այն դարձնում է ցանկալի և, հետևաբար, նրա մեջ մտցնում գեղեցիկի ինչ-որ երանգներ:

Սրա պատճառը, հավանաբար, գիտության և արվեստի նշանակության մեջ է: Եթե արվեստում գլխավորը հաճույքն է, ինչը պարզևում է արվեստի գեղեցիկը, ապա գիտության մեջ կարևորը հայտնագործությունն է, և այստեղ գեղեցիկը այն է, ինչը նպաս-

տում է նման հայտնագործության իրականացմանը: Արվեստի գեղեցիկը ուղղված է մարդու հուզական ոլորտին, որին, անշուշտ, մասնակցում է նաև նրա մտածողությունը: Մինչդեռ գիտական գեղեցիկը ուղղված է մարդու մտքին, որտեղ մասնակցում է նաև հուզական ոլորտը՝ ուրախություն և հաճույք պատճառելով նրան: Այսպես է բնութագրում նաև գեղեցիկը Լարիուսը՝ ֆրանսիական հանրահայտ հանրագիտարանը. գեղեցիկը այն է, ինչը «ուրախացնում է մարդու աչքը և միտքը»: Այն, ինչ ուրախություն է բերում մեր աչքին՝ գեղեցիկն է արվեստում, այն, ինչ ուրախացնում է մեր միտքը՝ գեղեցիկն է գիտության մեջ:

Այս մոտեցումը գալիս է անտիկ Հունաստանից: Պլատոնը, օրինակ, գրում է. «Անհրաժեշտ է գեղեցիկ մարմիններից բարձրանալ դեպի գեղեցիկ բարքեր, իսկ գեղեցիկ բարքերից՝ դեպի գեղեցիկ ուսմունքներ» / [118]/: Իսկ ինչի՞ մեջ է ուսմունքի կամ գիտության գեղեցկությունը: Ունի՞ այդ գեղեցիկը ինչ-որ հատկանիշներ, հայտանշներ, որոնք թույլ են տալիս բնութագրել կամ հայտնաբերել այն: Այս հարցին անդրադարձել են գիտության սկզբնավորման շրջանից. Պլատոնի՝ վերևում նշված մոտեցումը նման առաջին անդրադարձն է հավանաբար:

Հարցի գիտական լուսաբանումը առաջին անգամ կատարել է Շոտլանդացի փիլիսոփա Ֆրենսիս Խատչեսոնը (1694-1747): Նա, նախ, անդրադառնալով գիտական իմացության և գիտական գեղեցիկի տարբերությանը, նշում է, որ եթե իմացությունը ձգտում է գիտելիքների կուտակման, ապա գիտական գեղեցիկը ձգտում է նոր գիտելիքների հայտնաբերման, նոր փոխհարաբերությունների ու կարգի հաստատման: Այնուհետև, իր «Ուսումնասիրություններ գեղեցիկի և առաքինության վերաբերյալ մեր մտքերի ծագման

մասին» աշխատության մեջ գրում է. «Թեորեմների կամ համընդհանուր ճշմարտությունների ապացուցումների գեղեցկությունը արժանի է առանձին դիտարկման, քանի որ իրենց բնությամբ դրանք նշանակալից չափով տարբերվում են գեղեցկության նախկինում դիտարկված տեսակներից: Սակայն այդ տեսակների մեջ չկա ուրիշ այնպիսին, որում մենք կարողանանք տեսնել նման ապացուցիչ բազմազանություն՝ շաղկապված ընդհանուր միասնությամբ» /156/: Աշխատության՝ «Թեորեմների գեղեցկության մասին» բաժնում նա բերում է գիտության մեջ գեղեցիկի երեք հատկանիշ.

- գիտական գեղեցիկը բազմազանությունների միասնությունն է,
- գիտական գեղեցիկը գիտական ճշմարտության ընդհանրականությունն է,
- գիտական գեղեցիկը ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությունն է:

Խատչեսոնի աշխատությունը մեծ ազդեցություն թողեց գեղագիտական մտքի հետագա զարգացման վրա: Այդ ուղղությամբ իրենց ուսումնասիրություններով աչքի ընկան Դավիթ Հյումը (1711-1776), Ադամ Սմիթը (1723-1790), Իմանուել Կանտը, իսկ արվեստաբան Վ. Մ. Վոլկենշտեյնը առաջադրում է գիտության մեջ գեղեցիկի նոր հատկանիշներ /56/.

- գեղագիտական տպավորությունը առաջանում է միայն նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարմամբ,
- գեղեցիկը բարդի հանգեցումն է պարզին,

- գիտական ձեռքբերման յուրաքանչյուր հստակ ու ներդաշնակ մաթեմատիկական ձևակերպում առաջ է բերում գեղագիտական տպավորություն:

Ա. Պուանկարեն որպես գեղագիտական հատկանիշ առանձնացնում է մաթեմատիկական օբյեկտների ներդաշնակությունը և հայտնաբերման անսպասելիությունը. «Մարդիկ, որոնք խորամուխ են լինում մաթեմատիկայի գաղտնիքների մեջ, այնպիսի հաճույք են ստանում, ինչպիսին մեզ տալիս են գեղանկարչությունը և երաժշտությունը: Նրանք հիանում են թվերի և պատկերների ձևերի նրբագեղ ներդաշնակությամբ, նոր բացահայտումների բերած անսպասելի հեռանկարներով» / [121] /:

Ամերիկացի մաթեմատիկոս Գեորգ Բիրկհոֆը (1884-1944) առաջարկում է մաթեմատիկական գեղեցիկի գնահատման չափի համար որոշակի բանաձև.

$$M = O/C,$$

որտեղ M -ը առարկայի գեղեցկության չափն է, O -ն՝ նրա կարգի չափը, իսկ C -ն՝ այն ջանքերի չափը, որ ներդրվում է այդ առարկայի էությունը հասկանալու համար / [32] /: Հարկ է նշել, որ որոշ հեղինակներ վիճարկում են այս բանաձևում բաժանման առկայությունը: Իսկ անգլիացի հոգեբան, ինտելեկտի հանրահայտ թեստի հեղինակ Հանս Այզենկը (1916-1997)՝ առաջարկում է Բիրկհոֆի բանաձևը փոխարինել $M = OC$ բանաձևով, որովհետև նա գտնում է, որ ինչքան մեծ են մաթեմատիկական օբինաչափությունը հասկանալու համար ծախսած ջանքերը, այնքան մեծ է դրանից ստացված հաճույքը / [21] /:

Վ. Գ. Բոլտյանսկին առաջարկում է մաթեմատիկական օբյեկտի /բանաձև, խնդիր, թեորեմ և այլն/ գեղեցկությունը բնութագրել

այդ օբյեկտի և նրա դիտողական մոդելների իզոմորֆիզմով և նրա երևան գալու անսպասելիությամբ /36/։ Ըստ Բոլտյանսկու.

Գեղեցկություն = Դիտողականություն + Անսպասելիություն =
= Իզոմորֆիզմ + Պարզություն + Անսպասելիություն:

Գ. Ի. Սարանցը որպես մաթեմատիկայի բովանդակության մեջ գեղեցիկի երևան գալու հատկանիշներ է ընդունում կարգը, տրամաբանական խստությունը, պարզությունը, մաթեմատիկայի տարբեր բաժիններում նրա օգտագործելիության ընդհանրականությունը, ինքնատիպությունը, անսպասելիությունը /128/:

Մ. Ս. Յակիրը անդրադառնում է մաթեմատիկական խնդրի գեղեցկությանը և որպես հայտանիշեր, որոնք բնութագրում են գեղեցիկ խնդիրը, առաջարկում է անկանխատեսելիությունը, անսպասելիությունը, պարզությունը, հեղափոխական քայլի առկայությունը, լավատեսությունը, աշխատանքը /164/:

Օ. Ա. Կոբելյան մաթեմատիկական գաղափարի գեղագիտական գրավչությունը պայմանավորում է նրա ընդհանրականության և կիրառելիության հետ /89/:

Այս և մաթեմատիկական գեղեցիկի այլ բնութագրումներում առկա է կարծիքների բազմազանությունը: Չանազան ուսումնասիրություններում կիրառվում են նաև համակարգված մոտեցումներ, որոնցից մեկը վերաբերում է գիտական գեղեցիկի հատկանիշներին, որ սկիզբ է առել Ֆ. Խատչետսից: Այս ճանապարհին Ն. Վ. Գուսյեվան տարբերում է նաև մաթեմատիկական օբյեկտների արտաքին և ներքին գեղագիտությունները: Որպես արտաքին գեղեցկության դրսևորում է համարում երկրաչափական ձևի, անալիտիկ գրառման գեղագիտությունը, խնդրի լուծման ձևավորումը և այլն: Որպես ներքին գեղեցկության դրսևորում՝ իմաստի, մաթե-

մատիկական բովանդակության, օրինաչափությունների, դատողությունների, եզրահանգումների գեղագիտությունը / [71] /:

Ամերիկացի մաթեմատիկոս և մանկավարժ Պոլ Լոկհարդը մաթեմատիկական մտքերի փաստարկման ու հիմնավորման ընթացքը համեմատում է խաղի հետ, դրանում է տեսնում մաթեմատիկայի գեղագիտությունը և այն համարում է արվեստ:

Վերջում, նորից անդրադառնալով արվեստում և գիտության մեջ գեղեցիկի դրսևորման առանձնահատկություններին, նշենք, որ եթե «նկարիչների, քննադատների և արվեստագետների մեծ մասը գեղեցիկի գնահատման մեջ առաջնորդվում են իրենց ինտուիտիվ պատկերացումներով, ինչը սովորաբար բացարձականացվում է և համարվում է անսխալ» / [42] /, ապա գիտական գեղեցիկի համար նշվում են կոնկրետ հատկանիշներ, որոնք եթե անգամ չեն տալիս ամբողջական պատկերացում այդ գեղեցիկի մասին, ապա ընդգծում են նրա դրսևորման այս կամ այն կողմը:

§3. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԳԵՂԵՑԻԿԻ ՕՐՅԵԿՏԻՎ ԵՎ ՍՈՒԲՅԵԿՏԻՎ ՀԱՏԿԱՆԻՇՆԵՐԸ

Գեղեցկությունը մաթեմատիկական գաղափարների առաջին փորձաքարն է. աշխարհում այլանդակ մաթեմատիկական տեղ չունի:

Գ. Հարդի



Էշեր Մ., Գորտեր

Մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշների՝ վերնում բերված թոուցիկ ուսումնասիրությունը ցույց է տալիս, որ դրանք՝ կարգը, ներդաշնակությունը, համաչափությունը և այլն, առաջին հերթին, բուն մաթեմատիկական օբյեկտների հատկություններ են և պայմանավորված չեն ուսումնասիրող սուբյեկտով: Նման հատկանիշները մենք կանվանենք մաթեմատիկական գեղեցիկի կամ մաթեմատիկայի գեղագիտության օբյեկտիվ հատկանիշներ:

Միևնույն ժամանակ, մաթեմատիկական օբյեկտի գեղագիտական գրավչությունը կարող է երևան գալ մաթեմատիկական գործունեության ընթացքում, և այն պայմանավորված է նաև նման գործունեություն իրականացնող սուբյեկտի ունակություններից, գործադրված ջանքերի չափից և այլն: Այստեղ էլ երևան են գալիս գեղեցիկի այնպիսի հատկանիշներ, ինչպիսիք են ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությունը, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարումը, անսպասելիությունը, ինտելեկտուալ որոնումը և այլն: Պայմանավորվենք դրանք էլ անվանել մաթեմատիկայի գեղագիտության սուբյեկտիվ հատկանիշներ:

Հասկանալի է, որ մեր այս դասակարգումը ունի հարաբերական բնույթ. մաթեմատիկական օբյեկտների մեջ կարգի, ներդաշնակության, համաչափության հատկանիշները կարող են այդպիսիք նկատվել որոշ մարդկանց կողմից, մյուսները, ընդհակառակը, կարող են ընդհանրապես չնկատել կամ չընդունել դրանք: Մյուս կողմից, միևնույն մաթեմատիկական օբյեկտի ընկալումը կարող է մեկի համար լինել անսպասելի, մյուսի համար՝ ոչ, մեկից պահանջի մեծ ջանքեր, մյուսին տրվի հեշտությամբ: Այնուամենայնիվ, մաթեմատիկայի գեղագիտության հատկանիշի օբյեկտիվ կամ սուբյեկտիվ լինելը յուրաքանչյուր կոնկրետ դեպքի

համար կարող է հեշտությամբ զանազանվել, իսկ նման դասակարգումը մեզ կարող է օգնել դրանց ուսումնասիրությունը իրականացնելու գործընթացում:

1. Մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշները

Մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշները պայմանավորված են մաթեմատիկայի ճարտարապետական կառույցի գեղեցկությամբ: Դրանք, առաջին հերթին, դրսևորվում են համաչափության, համեմատության, ռիթմի, ներդաշնակության մեջ, որոնցով հարուստ է մաթեմատիկան /դրանց կանդրադառնանք առանձին՝ հաջորդ գլխում/: Մենք մաթեմատիկայի գեղագիտության օբյեկտիվ հատկանիշներ ենք համարում նաև բնության կազմավորման կարևորագույն սկզբունքները՝ ներդաշնակությունը, օպտիմալությունը և կայունությունը, որոնց էլ կանդրադառնանք գեղագիտական պահանջմունքների և մաթեմատիկայի փոխհարաբերությունների հարցը քննարկելիս՝ այս աշխատանքի հաջորդ մասերում: Մաթեմատիկայի գեղագիտության օբյեկտիվ հատկանիշներ են նաև կարգը, բազմազանությունների միասնությունը, ընդհանրականությունը, տրամաբանական խստությունը, հստակությունը, պարզությունը /բարդի հանգեցումը պարզին/, ինքնատիպությունը, օգտակարությունը, դիտողականությունը, իզոմորֆիզմը և այլն: Կանգ առնենք դրանցից կարևորագույնների վրա:

Կարգը: Կարգի դերը՝ որպես բնության կազմավորման հիմնական սկզբունք, ընդունվել է բոլոր ժամանակներում: Այն հակադրվել է քառսին և համարվել գեղեցկության աղբյուր: Անտիկ շրջանում այն առաջին հերթին վերաբերել է ողջ տիեզերքին: «Հավանաբար առաջինը տիեզերական կարգի մասին խոսել է Պյութագորասը, ընդ որում նման կարգի հաստատումը պյութագորականները վերագրում են թվերին» /[98]/: Պլատոնը կարգի գաղափարը կիրառում է մարդու մարմնի, հոգու, գեղագիտական, հասրակական և պետական կյանքի բոլոր ոլորտների կազմավորման գործընթացներում: Կարգի հասկացությանը մեծ տեղ է հատկացնում Արիստոտելը. նա կարգը առաջին հերթին վերագրում է թվերին և այն առնչում է գեղեցիկի հետ. «Գեղեցիկի ամենազվազվոր տեսակներն են կարգը, համաչափությունը և որոշակիությունը, որոնք բոլորից շատ ցույց են տալիս մաթեմատիկական կարգ»:

«Կարգը ազատում է միտքը», -ասում է ֆրանսիացի մաթեմատիկոս և փիլիսոփա Ռենե Դեկարտը (1596-1650): Իսկ Լե Կորբյուզեն ավելացնում է. «Ինչքան կատարյալ է կարգը, այնքան հանգիստ ու վստահ է զգում մարդն իրեն»:

Եվ բնական է կարգի ու նրա գեղագիտության հսկայական դերը մաթեմատիկայում, որը հանդես է գալիս որպես բնության «ոսկե գրքի», նրա օրինաչափությունների արտահայտման հիմնական միջոց կամ լեզու: Եվ ամենևին պատահական չէ, որ հանրահայտ մաթեմատիկոս և փիլիսոփա, կիբեռնետիկայի և արհեստական ինտելեկտի տեսության հիմնադիր Նորբերտ Վինները (1894-1964) գտնում է, որ մաթեմատիկայի բարձրագույն կոչումը մեզ շրջապատող քառսի մեջ կարգը գտնելն է: Եվ ոչ միայն մաթեմա-

տիկան, այլև գիտությունն ընդհանրապես ունի իրականության ճանաչման, աշխարհի քառսի մեջ կարգի որոնման և հաստատման կոչում: Սակայն, ի տարբերություն մնացած գիտությունների, կարգը մաթեմատիկայում հանդես է գալիս ոչ միայն որպես ուսումնասիրության, հետազոտման միջոց, այլև որպես կազմավորման հիմնական սկզբունքներից մեկը:

Որպես կազմավորման սկզբունք կարգը ավել կամ պակաս չափով հանդես է գալիս մաթեմատիկայի ամենատարբեր բնագավառներում: Նախ, կարգը ամենաընդահանուր տեսքով սահմանվում է կամայական բազմության վրա, ինչը սկիզբ է դնում ժամանակակից ողջ մաթեմատիկայի հիմքում ընկած կարգավորված բազմությունների տեսությանը: Այնուհետև, կարգի հիման վրա է ստեղծվում ժամանակակից հանրահաշվի հետաքրքիր բաժիններից մեկը՝ կավարների տեսությունը: Կարգի և հանրահաշվական համակարգերի միասնությամբ առաջանում է կարգավորված հանրահաշվական համակարգերի տեսությունը՝ ժամանակակից հանրահաշվի մի այլ հետաքրքիր բաժին:

Անշուշտ, նշված և կարգի հետ կապված մաթեմատիկական այլ տեսություններ ունեն նաև կիրառական և, ուրեմն, բնության ուսումնասիրության նպատակ: Սակայն այս տեսակետից անփոխարինելի է կարգի դերը, երբ այն հանդես է գալիս հավասարության, անհավասարության և ոչ խիստ անհավասարության տեսքով: Նախ հարկ է նշել, որ մաթեմատիկան իր զգալի մասով հանդես է գալիս որպես զանազան հավասարությունների, անհավասարությունների և դրանց ապացուցումների մասին գիտություն: Այս երկրորդ մոտեցմամբ կարգը նաև մաթեմատիկայի հետազոտման մեթոդ է. այն բացահայտում է ոչ միայն մաթեմատիկական

օբյեկտների միջև եղած փոխհարաբերությունները, այլև բնության օրինաչափությունները /հարկ է նշել, որ այս վերջին դեպքերում հավասարությունների և անհավասարությունների հետ միասին հանդես են գալիս հավասարումներն ու անհավասարումները/։ Վերջապես, հավասարությունները և անհավասարությունները ճանաչողության, իմացության աղբյուր են, ճշմարտության բացահայտման կարևորագույն միջոց. եթե զիտական օրինաչափությունը ներկայացվում է հավասարության կամ անհավասարության տեսքով, ապա այն համարվում է աներկբա ճշմարտություն։

Մաթեմատիկական օբյեկտի գեղագիտական գրավչությունը կարգով են պայմանավորում Գ. Բիրկհոֆը, Հ. Այզենկը, Գ. Ի. Սարանցը և այլ հետազոտողներ։ Գ. Բիրկհոֆը՝ մաթեմատիկայի գեղեցկության իր $M = O/C$ բանաձևում և Հ. Այզենկը՝ իր $M = OC$ բանաձևում թեև տրամագծորեն տարբեր կերպ են մոտենում մաթեմատիկական օբյեկտի գեղեցկության գնահատման հարցում նրա ընկալման համար գործադրված ջանքերի $/C/$ չափին, սակայն երկուսն էլ օբյեկտի գեղեցկությունը պայմանավորում են նրա կարգի չափով $/O-$ ով/։

Կարգի հետ առնչվող կամ նրանով պայմանավորված մաթեմատիկայի բնագավառները իրենց գեղեցկությամբ էապես չեն տարբերվում մաթեմատիկայի մյուս բաժիններից։ Միայն պետք է նկատել, որ կարգի առնչության ներգրավվածությունը այստեղ լրացուցիչ գեղագիտական երանգներ է հաղորդում ուսումնասիրվող մաթեմատիկական նյութին։ Իսկ հավասարություններին ու անհավասարություններին, նրանց բացահայտման և հաստատման/ապացուցման գործընթացներին մշտապես ուղեկցում են անսպասելիությունը, անկանխատեսելիությունը, հստակությունը,

պարզությունը, տրամաբանական խստությունը և մաթեմատիկական գեղեցիկի այլ հատկանիշներ:

Բազմազանությունների միասնությունը և ընդհանրականությունը: Բազմազանությունների միասնությունը գիտական գեղեցիկի՝ Խատչեսոնի առաջին հատկանիշն է, ինչը Խատչեսոնը համարում է գեղագիտական ընդհանրական սկզբունք՝ ինչպես բնության, այնպես էլ գիտական գեղեցկության գնահատման համար: Երբ, օրինակ, մենք գտնում ենք, որ հավասար հիմքեր և հավասար բարձրություններ կամ ավելին՝ հիմքերի և բարձրությունների միևնույն արտադրյալն ունեցող եռանկյուններ ունեն հավասար մակերեսներ, ապա այդպիսի եզրակացությունը կամ թեորեմը, որ հենվում է կամայական եռանկյան մակերեսի $s = ha/2$ բանաձևի վրա, միավորում է հավասար մակերես ունեցող եռանկյունների բազմազանությունը և գիտական գեղեցիկի արտահայտություն է և չի կարող մեզ հաճույք չպատճառել:

Այնուհետև, ինչպես այդ բանաձևը, այնպես էլ մաթեմատիկական յուրաքանչյուր թեորեմ ունի ընդհանրական բնույթ, այն տեղի ունի առարկաների լայն դասի համար և կիրառելի է այդ դասի յուրաքանչյուր ենթադասի կամ ներկայացուցչի համար: Եվ թեորեմի կիրառությունը յուրաքանչյուր նման դեպքի համար կամ նրանից ինչ-որ հետևանքի բխեցումը, ինչը Խատչեսոնը դիտում է որպես դեդուկցիայի դրսևորում, նույնպես գեղեցիկ է և ուղեկցվում է բավարարվածության, հաճույքի արտահայտությամբ. սա էլ Խատչեսոնի երկրորդ՝ գիտական ճշմարտության ընդհանրականության գեղագիտական հատկանիշ, է:

Բնության օրինաչափությունների, կիրառական խնդրի յուրաքանչյուր մաթեմատիկական գրառում բազմազանությունների

միասնության բացահայտում է, իսկ նման մաթեմատիկական գրառման կիրառությունների բազմազանության մեջ դրսևորվում է նաև գիտական ճշմարտության ընդհանրականության հատկանիշը: Երկու դեպքում էլ մենք գործ ունենք գիտական գեղեցիկի հետ: Այն, որ, օրինակ, ավանդի a քանակությունը բանկում յուրաքանչյուր տարի $p\%$ -ով ավելանալու դեպքում n տարի հետո դառնում է $a(1 + \frac{p}{100})^n$, բազմազանությունների միասնության դրսևորում է, իսկ նրա կիրառությունը, հաշվումը a , p , n պարամետրերի կոնկրետ արժեքների համար՝ գիտական ճշմարտության ընդհանրականության դրսևորում:

Գիտական գեղեցիկի Խատչեսոնի բնութագրած այս հատկանիշները լայնորեն դրսևորվում են գիտության և տեխնիկայի ամենատարբեր բնագավառներում մաթեմատիկայի բազմապիսի կիրառություններում: Իրենք, այդ կիրառությունները նախ և առաջ գիտության ու տեխնիկայի տարբեր բնագավառների միասնականության դրսևորումներ են, որ արտահայտվում են մաթեմատիկական բանաձևերով և թեորեմներով, և նաև՝ վերջիններիս ընդհանրականության հաստատումներ են:

Բուն մաթեմատիկայում գիտական գեղեցիկի այդպիսի դրսևորումների լայն հնարավորություններ է ստեղծում Դեկարտի հայտնագործած կոորդինատական մեթոդը, որ միասնություն է հաստատում հանրահաշվի և երկրաչափության միջև: Վերլուծական երկրաչափության դասընթացին նոր ծանոթացող առաջին կուրսեցի համալսարանական մաթեմատիկոս-ուսանողներին ծանոթ է հաճույքի այն զգացումը, որ առաջացնում են երկրաչափության դպրոցական դասընթացի խնդիրների համադրական լուծումներին փոխարինած վերլուծական երկրաչափության հանրահաշվա-

կան մեթոդների կիրառումից ստացվող չափազանց պարզ լուծումները: Դա գիտական գեղեցիկի՝ Խատչեանի առաջին և երկրորդ հատկանիշների դրսևորումից առաջացած հաճույքն է:

Գիտական գեղեցիկի՝ բազմազանությունների միասնության և գիտական ճշմարտության ընդհանրականության սկզբունքները լայնորեն դրսևորվում են տեսությունների կառուցման արքիոմատիկ մեթոդի մեջ: Վեկտորական տարածությունների տեսության արքիոմների համակարգը, օրինակ, իր ութ արքիոմների մեջ միավորում է այն, ինչը ընդհանուր է ուղղի՝ միաչափ, հարթության՝ երկչափ, տարածության՝ եռաչափ և, ընդհանրապես, վեկտորական տարածության բոլոր օրինակների համար, և հնարավորություն է տալիս միայն այդ ութ արքիոմների միջոցով զարգացնել մաթեմատիկայի հիմքում ընկած տեսություններից մեկը: Այստեղ դրսևորվում է գիտական գեղեցիկի բազմազանությունների միասնության Խատչեանի հատկանիշը, որը ստացված տեսության գեղագիտական գրավչությունը պայմանավորող գործոններից մեկն է: Այնուհետև, այդ տեսության մեջ ստացված արդյունքները կիրառվում են տեսության կոնկրետ օրինակների վրա: Սա էլ գիտական ճշմարտության ընդհանրականության Խատչեանի սկզբունքն է, որի գեղագիտական գրավչությունը ակնառու է. մաթեմատիկական փաստը ապացուցվում է ոչ թե վեկտորական տարածության յուրաքանչյուր օրինակի համար առանձին /ինչը շատ աշխատատար և ձանձրալի կլիներ/, այլ, ելնելով վեկտորական տարածությունների ընդհանուր տեսության փաստերի իրավացիությունից, հնարավորություն է ընձեռում դրանք կիրառել օրինակներից յուրաքանչյուրի համար:

Նշենք, որ գիտական գեղեցիկի՝ բազմազանությունների միասնության և ընդհանրականության հատկանիշները, դրանց գեղագիտական գրավչությունը լավագույնս դրսևորվում են մաթեմատիկայի ուսուցման և իմացության գիտական մեթոդներում, ինչին մենք կանդրադառնանք սույն աշխատության երկրորդ մասում:

Հստակությունը: Մտքի, խոսքի հստակությունը, հստակ շարադրանքը նրա ընկալման, նաև գրավչության անհրաժեշտ պայման է: Առանց հստակության թեկուզ և ամենագայթակղիչ պատմությունը կորցնում է իր գրավչությունը: Իսկ նյութի անհստակ շարադրանքը կարող է այն դարձնել նաև անհասկանալի: Նույնիսկ հանճարեղ գիտնականին ինտուիցիան հնարավորություն չի տալիս միանգամից ձևակերպել վարկածը. բազմաթիվ հավանական հնարավորությունների մեջ նա կարողանում է ընտրել, գտնել, հաստատել, ապացուցել մեկը՝ անհրաժեշտը, ճշմարիտը, և ստացված գիտական արդյունքը նա ներկայացնում և շարադրում է ամեննին ոչ այն ձևով, ինչպես կամ ինչ հերթականությամբ ստացել է: Այստեղ նրան անհրաժեշտ է այդ շարադրանքի վարպետությունը, ինչը, առաջին հերթին, պայմանավորված է հստակությամբ: Մեծ մտածողները կարողանում են հստակ շարադրել ոչ միայն իրենց ստացած արդյունքները, այլև գիտության համապատասխան բնագավառները: Դրանք աչքի են ընկնում փաստարկվածությամբ և հիմնավորվածությամբ, հնարավորություն են տալիս զանազանել գլխավորը երկրորդականից, ընկալել, հասկանալ նյութի, առարկայի էությունը: Մաթեմատիկայի պարագայում այստեղ առաջնահերթ նշանակություն է ունեցել և ունի նրա լեզուն: Փորձեք կարդալ անցյալի մաթեմատիկոսների աշխատանքները: Դրանցում նույնիսկ պարզ փաստերի

շարադրանքը բավականին խրթին է և դժվար է հասկացվում, երբեմն կարդացողից պահանջում է վերծանողի վարպետություն: Այս ամենի պատճառը լեզուն է: Եվ, ինչպես նշվեց վերևում, մաթեմատիկայի լեզուն իր այսօրվա կատարելությանը հասել է մեծագույն մաթեմատիկոսների դարավոր աշխատանքի արդյունքում, իսկ կատարելագործման խթանիչ ուժը և ստացված արդյունքի գեղագիտական գրավչությունը հստակությունն է:

Սակայն մենք հաճախ ենք հանդիպում նաև մաթեմատիկայի նյութերի ժամանակակից հրաշալի լեզվով կատարված տաղտկալի, դժվար ըմբռնելի, անհետաքրքիր շարադրանքների: Հիմնական պատճառներից մեկը շարադրանքի անհստակությունն է: Այստեղ պահանջվող հստակությունը, առաջին հերթին, ուսումնասիրվող հասկացությունների միանշանակ, անորոշություններից, շրջապտույտներից կամ արատավոր շրջաններից գերծ սահմանումներն են, դրանց բովանդակության պարզորոշ ներկայացումը, այլ հասկացությունների հետ սեռային և դասային պատկանելության, դրանց ծավալի և դրանից դուրս ընկած օրինակների դիտարկումը, դատողությունների հստակ ձևակերպումը և դրանց ճշմարտական արժեքների որոշման միանշանակությունը, մտահանգումների, թեորեմների միանշանակ ընկալման հնարավորությունը, ապացուցումների փաստարկվածությունը և այլն: Առանց հստակության այս պահանջների իրականացման՝ մաթեմատիկական նյութը, նրա շարադրանքը չի կարող ունենալ գեղագիտական գրավչություն:

Պարզությունը: Դեռևս հին հռոմեական պոետ Հորացիոսը պարզությունը համարում էր արվեստի գեղագիտական սկզբունք: Վ. Մ. Վոլկենշտեյնը գտնում է, որ գեղեցիկը բարդի հանգեցումն է

պարզին, իսկ պարզությունը՝ որպես գիտական գեղեցիկի հատկանիշ, առաջադրում են նաև Վ. Գ. Բոլտյանսկին, Գ. Ի. Սարանցևը, Մ. Ս. Յակիրը:

Ընդունված տեսակետ է, որ մաթեմատիկական գործունեությունը բարդ բնագավառ է: Անշուշտ, մաթեմատիկայի որևէ բնագավառում հայտնագործությունների կատարումը մաթեմատիկոսից պահանջում է մտքի հետևողական ընթացք և լարում, երբեմն՝ գերլարում, ամենօրյա համառ աշխատանք, կամային որակների դրսևորում: Եվ ստացված հայտնագործությունների հետ ծանոթացումը նույնպես դժվար է: Այն, բացի հետազոտողի մտահղացումները հասկանալու համար անհրաժեշտ լարվածությունից, պահանջում է նաև գիտելիքների ահռելի պաշար: Եվ պատահական չէ, որ այսօր տարբեր բնագավառներում աշխատող մաթեմատիկոսները իրար դժվար են հասկանում կամ ընդհանրապես չեն հասկանում: Այդ գործընթացը կարգավորելու համար մաթեմատիկոսները հետևողական աշխատանք են տանում մաթեմատիկական լեզվի պարզեցման ուղղությամբ: Միաժամանակ մաթեմատիկական ինքը, մաթեմատիկական հայտնագործությունը մեծ մասամբ իրականացվում է բարդը պարզին հանգեցնելու միջոցով, իսկ մաթեմատիկական գործունեությունը հիմնականում մաթեմատիկական օբյեկտների, դրանց հատկությունների, նրանց միջև փոխհարաբերությունների պարզեցման գործընթաց է:

Այս աշխատանքի հաջորդ բաժիններում մենք առիթ կունենանք ծանոթանալու խմբի գաղափարի հետ: Այն ուսումնասիրվում է խմբերի տեսության մեջ և լայն կիրառություն ունի մաթեմատիկայում և գիտության այլ բնագավառներում: Այդ տեսության կառուցման համար կարևոր նշանակություն ունի

խմբերի այս կամ այն դասի նկարագրությունը՝ ավելի բարդ խմբերի ներկայացումը համեմատաբար պարզ տեսք ունեցող խմբերի միջոցով: Պարզագույն խմբեր են այսպես կոչված վերջավոր ցիկլային խմբերը. կամայական n բնական թվի համար կա այդպիսի մեկ խումբ՝ 1 –ից n աստիճանի բոլոր կոմպլեքս արմատների բազմությունը՝ բազմապատկման գործողության նկատմամբ: Պարզ է, որ նման խմբերը տեղափոխական են, այսինքն՝ խմբի կամայական երկու տարրերի արտադրյալը նույնն է մնում արտադրիչների տեղափոխության դեպքում: Իսկ ինչպիսի՞ տեսք ունեն վերջավոր տեղափոխական խմբերը: Պարզվում է, որ նման յուրաքանչյուր վերջավոր խումբ ստացվում է վերջավոր ցիկլային խմբերի միջոցով, խմբերի հետ կատարվող մի պարզ գործողությամբ, որ կոչվում է նրանց ուղիղ արտադրյալ: Սա գիտական գեղեցիկի՝ բարդը պարզին հանգեցնելու Վոլկենշտեյնի հատկանիշի կիրառման օրինակ է:

Մաթեմատիկական գեղեցիկի՝ բարդը պարզին հանգեցնելու հատկանիշի դրսևորման հրաշալի օրինակ է պատկերների մակերեսների /ինչպես նաև կորերի հատվածների, մարմինների ծավալների/ չափումը: Այս գործընթացը մենք սկսում ենք պարզագույն պատկերից՝ քառակուսուց. դրանցից մեկը ընդունում ենք որպես չափման միավոր: Այնուհետև անցնում ենք ավելի բարդ պատկերի՝ ուղղանկյանը. ցույց ենք տալիս, որ ուղղանկյան մակերեսը հավասար է նրա երկու չափումների արտադրյալին: Ուղղանկյան մակերեսի հաշվման բանաձևը օգտագործում ենք եռանկյան մակերեսը հաշվելու համար և այլն:

Բարդը պարզին հանգեցնելու հաշվումների այս ընթացքը և դրա արդյունքները ունեն նաև կիրառական մեծ նշանակություն և

հայտնի էին դեռևս հին աշխարհում՝ Եգիպտոսում, Միջագետքում, անտիկ Հունաստանում: Դրանցում դատողությունների հանգեցման ընթացքը բավականին պարզ է, հեշտությամբ է ընկալվում և, հետևաբար, մեծ չէ դրա գեղագիտական գրավչությունը: Իսկ ահա շրջանի մակերեսը նման դատողությունների միջոցով ոչ մի կերպ հնարավոր չէ հաշվել: Եվ անհրաժեշտ արդյունքին հասնելու գործընթացը պահանջում էր հեղափոխական քայլի առկայություն, անսպասելիություն, ջանքեր և մաթեմատիկական գեղագիտության այլ հատկանիշներ և, իհարկե, այդ գործընթացն իրականացնելու հանճար, որ տրված էր Պլատոնի աշակերտ Էվդոքս Կնիտացուն (մ.թ.ա. մոտ. 408-մոտ. 355):

Իր սպառման մեթոդում Էվդոքսը տալիս է ոչ միայն շրջանի մակերեսի հաշվման եղանակը, այլև, ըստ էության, դնում է սահմանների տեսության և, ընդհանրապես, մաթեմատիկական անալիզի նախահիմքերը: Իսկ այդ արդյունքների ճշգրիտ մաթեմատիկական ձևակերպումը հնարավոր դարձավ միայն Էվդոքսից մոտ երկու հազար տարի հետո, երբ եվրոպական մաթեմատիկական միտքը Նյուտոնի, Լայբնիցի և այլ մաթեմատիկոսների ուժերով մաթեմատիկական լեզվին տվեց ժամանակակից տեսքը: Այդ լեզվով շրջանի մակերեսը հաշվվում է որպես նրան ներգծված ուսնկյուն կանոնավոր բազմանկյան մակերեսների հաջորդականության սահման, երբ n -ը ձգտում է անվերջության: Հետագայում հնարավոր եղավ հաշվել նաև ավելի բարդ կորերով սահմանափակված պատկերների մակերեսները՝ դրանց հաշվման գործընթացում ինտեգրալի գաղափարի ներգրավման միջոցով: Բարդը պարզին հանգեցնելու այս հաջորդական գործընթացը մաթեմա-

տիկական մոտեցման փայլուն օրինակ է, որի գեղագիտական գրավչությունը ակնառու է:

Տրամաբանական խստությունը: Տրամաբանական խստությունը մաթեմատիկական գիտելիքը դարձնում է հավաստի, այն տիրապետողին գերծ է պահում մոլորություններից, թույլ է տալիս գտնել ճշմարտության ճանապարհը: Այդ պատճառով նման գիտելիքը ունի գեղագիտական մեծ գրավչություն և ցանկալի է յուրաքանչյուրի համար: Հարկ է նկատել, որ մաթեմատիկական մտքերի շարադրանքը, նրա թեորեմների ապացուցումները ընթանում են տրամաբանության օրենքներին և կանոններին համապատասխան, և մաթեմատիկական գործունեությունը ենթադրում է հասկացությունների ներմուծման, մտքերի շարադրման և ապացուցումների իրականացման տրամաբանական խստություն: Մաթեմատիկան, մաթեմատիկական գիտելիքի, կիրառությունը տրամաբանական խստություն են հաղորդում նաև բոլոր այն գիտություններում ստացված արդյունքներին, որոնցում մաթեմատիկան կիրառվում է: Եվ ամենևին պատահական չէ գիտական աշխարհում վաղուց հաստատված այն տեսակետը, որ առանց մաթեմատիկայի կիրառման ստացված գիտական արդյունքները չեն կարող հավաստի համարվել:

Սակայն տրամաբանական խստությունը մաթեմատիկայում նույնպես առնչվում է լուրջ խնդիրների և խոչընդոտների: Այստեղ առաջանում են տրամաբանության օրենքների հիման վրա կառուցված դեդուկտիվ տեսությունների անհակասականության, լրիվության, մաթեմատիկայում /և տրամաբանության մեջ/ ծագած հակասությունների հաղթահարման հետ կապված խնդիրներ, որոնց լուծման ճանապարհին առաջացավ մաթեմատիկական

տրամաբանությունը՝ ճանաչված մաթեմատիկոս Ս. Կլինիի բնութագրմամբ՝ մաթեմատիկական մեթոդների միջոցով տրամաբանության զարգացման կամ վերակառուցման տեսությունը:

Տրամաբանական խստությունը հատուկ է և վերաբերում է մաթեմատիկական բոլոր օբյեկտներին՝ հասկացություններին, թեորեմներին և խնդիրների ձևակերպումներին և նրանց ապացուցումներին ու լուծումներին:

Կիրառելիությունը: Հանրահայտ է մաթեմատիկայի կիրառական նշանակությունը բնության և գիտության առանձին բնագավառների ուսումնասիրության գործընթացում: Նման կիրառությունները հնարավոր և հավաստի են դարձնում ստացված տեղեկությունները, մեծացնում ճշմարտության կշիռը այդ ուսումնասիրություններում: Այսինքն՝ մաթեմատիկան յուրաքանչյուր գիտության մեջ բերում է ճանաչողություն և ճշմարտություն:

Ֆիզիկայում, քիմիայում, տնտեսագիտության և այլ բնական ու հասարակական գիտությունների մեջ մաթեմատիկայի կիրառությունները հաստատում են ասվածը: Ավելին, այդ գիտություններն իրենց ժամանակակից տեսքով անհնար է պատկերացնել առանց մաթեմատիկայի:

Դիտարկենք մեկ օրինակ: Հանրահայտ է Պյութագորասի թեորեմի դերը երկրաչափության մեջ և նրա կիրառություններում: Բայց նույն ոլորտներում ոչ պակաս կարևոր դեր է խաղում Թալեսի թեորեմը /տես երրորդ գլխի երկրորդ պարագրաֆը և այս գրքի երկրորդ մասը/: Այդ դեպքում ինչո՞ւ է մեծ Կեպլերը հենց Պյութագորասի թեորեմն անվանում երկրաչափության առաջին գանձ: Հավանաբար պատճառը Պյութագորասի թեորեմի միջոցով բնագի-

տության առաջադրած հիմնական հարցերից մեկի պատասխանի
ստացումն է:

Մարդու կյանքի, նրա կենսագործունեության իրականացման
մեջ կարևորագույն դեր է խաղացել ուղիղ անկյունը: Իսկապես,
առանց ուղիղ անկյան և նրա կառուցման անհնար է ոչ միայն
ճարտարապետությունը, այլև ընդհանրապես որևէ շինության
կառուցումը. կարելի է վստահորեն ասել, որ ուղիղ անկյան
կառուցումը շինարարության հիմքն է: Այդ պատճառով ուղղա-
չափը՝ գործիքը, որի միջոցով ստուգվում է շինության պատի
ուղղահայացությունը հիմքի նկատմամբ, որմնադիրի ամենաշատ
օգտագործվող և նրանից անբաժան գործիքն է: Նույն խնդիրը
լուծում է նաև Պյութագորասի թեորեմը կամ նրա հակադարձ
թեորեմը. եթե եռանկյան մի կողմի քառակուսին հավասար է մյուս
երկուսի քառակուսիների գումարին, ապա այն ուղղանկյուն
եռանկյուն է: Շինարարները երբեմն իրենց մոտ պահում են 3, 4 և 5
չափեր ունեցող եռանյուն և, օգտվելով նշված պնդումներից,
ստուգում են անկյան ուղիղ լինելը: Հաճախ նման եռանկյան
կողմերը պատրաստվում են պարաններից, ինչը գործնական
տեսանկյունից ավելի արդյունավետ է դարձնում դրանց կիրա-
րումը: Եվ կարևորն այն է, որ նման պյութագորյան եռանկյունները
հնարավորություն են տալիս կառուցելու ուղիղ անկյուններ նաև
հորիզոնական հարթության վրա, ինչը չի կարելի իրականացնել
ուղղաչափի միջոցով:

Գիտական օրինաչափության մաթեմատիկական գրառումը:
Գիտական հայտնագործության կամ օրինաչափության մաթեմա-
տիկական գրառումը գիտական գեղեցիկի հատկանիշ է համարում
Վոլկենշտեյնը, ով մաթեմատիկայի գեղագիտական արժեքը ներ-

կայացնում է այսպես. «Մաթեմատիկան նուրբ գեղեցկության ոլորտ է: Նրա բանաձևերը առանձնահատուկ ձևերի միջոցով արտահայտում են թվերի միջև եղած առնչությունները: Այդ պատճառով դրանք կարող են լինել գեղեցիկ կամ, ինչպես մաթեմատիկոսներն են սիրում ասել, նրբագեղ» ([56]): Նման գեղեցկության հրաշալի օրինակ են ծառայում անգլիացի ֆիզիկոս, դա-սական էլեկտրադինամիկայի հիմնադիր Ջեյմս Մաքսվելի (1831-1879) հավասարումները. մաթեմատիկական շատ պարզ տեսք ունեցող այդ չորս բանաձևերը հնարավորություն տվեցին միավորել էլեկտրականությունը, մագնիսականությունը և լույսը: Ֆիզիկայում նման գրառման հրաշալի օրինակներ է տվել Նյուտոնը մեխանիկայի իր օրենքներով: Եվ պատահական չէ, որ հենց, Նյուտոնն էլ նման գրառումները համարում է Աստծո գոյության ապացույց, ինչը նշվեց վերևում:

Հեղափոխական քայլի առկայությունը: Մաթեմատիկայի պատմությունը հարուստ է այնպիսի հայտնագործություններով, որոնք անմիջականորեն չեն բխում նախկինում հայտնի գաղափարներից ու մոտեցումներից և պահանջում են նոր մոտեցումներ, նոր գաղափարներ, այլ խոսքերով՝ հեղափոխական քայլ: Հեղափոխական քայլը հանգեցնում է երևույթի որակական փոփոխությունների: Այն մաթեմատիկայի և, ընդհանրապես, գիտության ու տեխնիկայի զարգացման կարևորագույն հանգրվան է և ազդում է ինչպես առանձին բնագավառների, այնպես էլ գիտության ու տեխնիկայի հետագա զարգացման վրա: Նման քայլերը հիմնարար, արմատական նշանակություն են ունեցել նաև մաթեմատիկայի զարգացման համար և մեծ ուժով առաջ են մղել այն:

Հեղափոխական մոտեցումը առկա է շրջանի մակերեսի և շրջանագծի երկարության հաշվման էվդոքսի մոտեցումներում, դրա հիմնավորման և մաթեմատիկական այլ հարցերի լուծման համար Նյուտոնի և Լայբնիցի ստեղծած դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվներում, որոնց մասին խոսվեց վերևում, զուգահեռության մասին Էվկլիդեսի հինգերորդ աքսիոմի պրոբլեմը լուծելու և ոչ Էվկլիդեսյան երկրաչափության ստեղծման Գաուսի, Լոբաչևսկու և Պոյայիի մոտեցումներում, բազմությունների տեսության Կանտորի հայտնագործության մեջ և այլն:

Գաղափարների, մոտեցումների նորաբարությունը, երևույթների միջև առկա կապերի և օրինաչափությունների անսպասելիությունը, անկանխատեսելիությունը նման հայտնագործությունների գեղագիտական գրավչության աղբյուր են: Սակայն հեղափոխական քայլի առկայությունը մաթեմատիկական նյութին հաղորդում է գեղագիտական լրացուցիչ և առանձնահատուկ գրավչություն: Դիտարկենք մեկ օրինակ:

1736 թվականին իր նամակներից մեկում Լեոնարդ Էյլերը (1707-1783) առաջադրեց Քյոնիգսբերգի յոթ կամուրջների խնդիրը:

Քյոնիգսբերգում՝ նրանով անցնող Պրեգոլ գետի վրայով, ձգվում են յոթ կամուրջներ: Պահանջվում է անցնել այդ կամուրջներից յուրաքանչյուրով, ցանկացած հերթականությամբ, բայց ոչ մեկով մեկից ավելի անգամ չանցնել: Ինչպե՞ս անել դա:

Թվում է՝ խնդիրը շատ պարզ. նրա լուծման բոլոր փորձերը հանգեցնում են բացասական արդյունքի, բայց գիտնականներին ոչ մի կերպ չէր հաջողվում վերջնականապես ապացուցել, որ նման անցում հնարավոր չէ իրականացնել: Եվ հենց Էյլերն էլ կարողացավ գտնել այդ «պարզ» խնդրի լուծումը, ինչը կապված էր

մաթեմատիկայի մինչ այդ անհայտ ուղղության՝ գրաֆների տեսության հետ, և դրա ստեղծման պատճառ դարձավ: Փորձենք հետևել էյլերի մտահղացումներին:

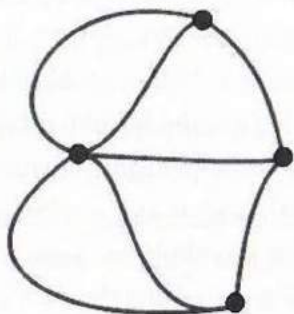
Նախ էյլերը Բյոնիգսբերգը փոխարինեց նրա քարտեզով: Ահա այն.



Քարտեզից երևում է, որ Պրեգուրը քաղաքը բաժանում է չորս մասի: Հասկանալի է, որ խնդրի լուծման համար այդ մասերից որևէ մեկում գտնվելիս ամեննին կարևոր չէ, թե նրա որ կետում ենք գտնվում: Այդ պատճառով էյլերը դրանք պատկերեց կետերով: Նշանակություն չունեն նաև կամուրջների տեսքը և գետի առկայությունը. կարևորն այն էր, որ կամուրջը երկու մասերը միացնում է իրար, և էյլերը քաղաքի մասերը միացնող կամուրջներն էլ փոխարինեց դրանք պատկերող կետերը միացնող գծերով: Արդյունքում ստացվեց այսպիսի մի պատկեր.



Այժմ խնդրի լուծման համար էյլերին Քյոնիգսբերգի քարտեզը արդեն պետք չէր, և նա առանձնացրեց իր գծած պատկերն ու այն անվանեց գրաֆ: Նշված կետերը նա անվանեց գրաֆի գագաթներ, իսկ դրանք միացնող գծերը՝ գրաֆի կողեր: Գծագրում պատկերված գրաֆը Քյոնիգսբերգի կամուրջների գրաֆն է:



Նրանում որոշ գագաթներ միացված են երկու կողերով: Բայց կարելի է առանց ընդհանրությունը խախտելու բավարարվել նաև գագաթների ցանկացած զույգը մեկից ոչ ավելի կողերով միացնող գրաֆներով: Դրա համար բավական է յուրաքանչյուր բազմապատիկ կողի վրա ավելացնել մեկ գագաթ:

Նրան մնում էր գրաֆների լեզվով ձևակերպել նաև յոթ կամուրջների խնդիրը: Դրա համար նա ներմուծեց մի հասկացու-

թյուն, որը հետագայում կոչվեց *Էյլերի* ցիկլ: Դիցուք *կետերի* $A_1, A_2, \dots, A_n, A_1$ հաջորդականությունը, որի հարևան անդամներն իրարից տարբեր են, պարունակում է ինչ-որ գրաֆի բոլոր գագաթները: $(A_1, A_2), (A_2, A_3), \dots, (A_{n-1}, A_n), (A_n, A_1)$ հաջորդականությունը կոչվում է այդ գրաֆի *Էյլերի* ցիկլ, եթե այն կրկնվող անդամներ չունի և պարունակում է գրաֆի բոլոր կողերը:

Ահա մաթեմատիկական մոտեցման, նրա լեզվի գեղագիտական գրավչությունը. կիրառական խնդրից «հեռացվեցին» բոլոր ոչ էական բաղադրիչները և մնացին միայն նրանք, որոնք էական էին և խնդրին տվեցին արդեն պարզ ու հստակ տեսք: Այժմ Քյոնիգսբերգի յոթ կամուրջների խնդիրը կարելի է ձևակերպել որպես մաթեմատիկական խնդիր: Իսկապես, դժվար չէ նկատել, որ յոթ կամուրջների խնդրի դրական լուծում ունենալը համարժեք է նրա գրաֆի *Էյլերի* ցիկլ ունենալու մաթեմատիկական խնդրին: Իսկ այդ խնդիրը, արդեն կամայական գրաֆի համար, *Էյլերը* լուծեց փայլուն ձևով: Նա ապացուցեց, որ կամայական գրաֆը կունենա *Էյլերի* ցիկլ այն և միայն այն դեպքում, եթե նրա յուրաքանչյուր գագաթից ելնում են գույգ թվով կողեր: Այս հրաշալի արդյունքը ներկայումս հայտնի է *Էյլերի* թեորեմ անունով /*Էյլերի* թեորեմի ապացուցումը կարելի է գտնել, օրինակ, [8]-ում, իսկ մենք այն կբերենք այս գրքի երկրորդ մասում/: Դժվար չէ նկատել, որ Քյոնիգսբերգի կամուրջների գրաֆը չի բավարարում *Էյլերի* թեորեմի պայմաններին: Հետևաբար, յոթ կամուրջների խնդիրը ունի բացասական լուծում:

Այստեղ առկա են բարդը պարզին հանգեցնելու, բազմազանությունների միասնության, ընդհանրականության, հստակության, տրամաբանական խստության և մաթեմատիկական գեղեցիկի այլ հատկանիշներ: Սակայն խնդրի լուծման «աղը» հեղափոխական

մոտեցումն է՝ լուծման համար նոր տեսության ստեղծումը, ինչը խնդրի լուծմանը հաղորդում է գեղագիտական առանձնահատուկ գրավչություն:

Հեղափոխական քայլերը ուղեկցում են մաթեմատիկական գործունեությանն, ընդհանրապես, և այդ քայլերի ճիշտ կատարումը, դրա գեղագիտական գրավչության վերհանումը կարևոր նշանակություն ունեն մաթեմատիկական գործունեության հաջող իրականացման համար:

2. Մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշները

Մաթեմատիկական գեղեցիկի ընկալման համար պակաս կարևոր չէ նաև այն, թե ո՞վ է ուսումնասիրում համապատասխան մաթեմատիկական նյութը, ինչ տպավորություն է թողնում այն ուսումնասիրողի վրա, ի՞նչ ջանքեր է գործադրում նա նյութը ընկալելու համար, արդյոք ունի՞ որակներ այդ նյութը և նրանում առկա գեղեցիկը ընկալելու և գնահատելու համար: Այս տեսակետից մաթեմատիկական գեղեցիկը բնութագրվում է նաև սուբյեկտիվ հատկանիշներով, որոնցից առանձնացվում են անկանխատեսելիությունը, անսպասելիությունը, ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությունը, ինտելեկտուալ որոնումը, գտնելը կամ հայտնագործելը, այն ջանքերի չափը, որոնք ներդրվում են առարկայի եությունը հասկանալու համար, լավատեսությունը, աշխատանքը,

նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարումը: Դիտարկենք թվարկածներից մի քանիսը:

Ինտելեկտուալ որոնումը, գտնելը, հայտնագործելը: Մարդու կենսագործունեության մեջ մեծ տեղ ունեն որոնելը, գտնելը, հայտնագործելը, որոնց իրականացումը նախ և առաջ ինտելեկտուալ գործունեություն է, և ինչպես գիտության, այնպես էլ արվեստի բնագավառում հաճախ կատարվում է մաթեմատիկայի միջամտությամբ: Ավելին, այս գործընթացների իրականացումը երբեմն հնարավոր է դառնում միայն մաթեմատիկայի ակտիվ ներգրավման, նրա արդյունքների կիրառության շնորհիվ: Իսկ մարդու մտածողության և հոգեկան այլ գործընթացների ձևավորման ու զարգացման մեջ ունեցած նշանակությունը ավելի է կարևորում մաթեմատիկայի դերը ինտելեկտուալ գործունեությունը, մասնավորապես՝ ինտելեկտուալ որոնումը հաջողությամբ իրականացնելու գործում: Ավելացնենք նաև, որ բուն մաթեմատիկական գործունեությունը՝ մաթեմատիկայի տարրական փաստերի հետ ծանոթացումից մինչև մաթեմատիկական հայտնագործությունների իրականացում, զուտ ինտելեկտուալ որոնման արդյունք է:

Ինտելեկտի /լատիներեն՝ intellectus – հասկանալ/ բնորոշման հարցում կան տարբեր մոտեցումներ: Դրանցից մեկում այն դիտվում է որպես հոգեկան որակ, ինչն արտահայտվում է նոր իրադրություններին հարմարվելու, փորձի հիման վրա սովորելու, հասկանալու և կիրառելու, շրջակա միջավայրում կողմնորոշվելու և գործունեությունն իրականացնելու ընթացքում գիտելիքներն օգտագործելու մարդու ընդունակությամբ /[164]/: Գ. Ագիմովը և Վ. Շչուկինը ինտելեկտ ասելով հասկանում են մարդու առջև

կանգնած դժվարությունները ճանաչելու և հաղթահարելու ընդունակությունը, ինչի համար միավորվում են մարդու ճանաչողական ողջ ունակությունները՝ զգայությունը, ընկալումը, հիշողությունը, մտածողությունը, երևակայությունը / [20] /:

Ինտելեկտը դրսևորվում է նպատակադրման, ռեսուրսների պլանավորման և նպատակին հասնելու համար անհրաժեշտ ռազմավարության կառուցման մեջ: Ենթադրվում է, որ ինտելեկտի նախադրյալներ նկատվում են նաև կենդանիների մոտ, իսկ մարդը կենդանական աշխարհում առանձնանում է ինտելեկտի զարգացման բարձր աստիճանով / [108] /: Ինտելեկտի էական հատկանիշներն են. հետաքրքրասիրությունը, մտքի խորաթափանցությունը, ճկունությունը, շարժունակությունը, մտածողության տրամաբանությունը, ապացուցողականությունը, քննադատականությունը, լայնախոհությունը:

Ինտելեկտի առանձին հատկանիշների կարևոր նախադրյալներ են մարդու գենոտիպը, նրա կյանքի փորձը: Որպես ինտելեկտուալ ունակությունների զարգացման անհրաժեշտ պայման է համարվում նոր, արդիական հիմնահարցերի, իրադարձությունների հնարավոր զարգացման նկատմամբ զգայունակությունը, քսենոֆոբիայի՝ նորից, անսովորից վախենալու բացակայությունը:

Ինտելեկտի բացասական հատկանիշներ են մտածողության ոչ ճկունությունը, երևույթների հանդեպ կանխամտածված վերաբերմունքը, զգացական տպավորության գերագնահատումը, շարունային գնահատականները և այլն: Դ. Գիլֆորդը և Գ. Այզենկը մարդու ինտելեկտի զարգացվածության աստիճանը որոշելու համար առաջարկում են ինտելեկտուալ թեստեր՝ IQ / [21] /:

Իսկ ինչպե՞ս է անդրադառնում մաթեմատիկական գործունեությունը մարդու ինտելեկտուալ որակների ձևավորման և զարգացման գործընթացի վրա: Բնական է ինտելեկտուալ որոնման գեղագիտական գրավչության մեջ մաթեմատիկայի դերի և մաթեմատիկական գործունեության ընթացքում ինտելեկտուալ որոնման գեղագիտական գրավչության խնդիրները հանգեցնել ինտելեկտի առանձին հատկանիշների, որակների վերաբերյալ համանման խնդիրների: Բնական է նաև ենթադրել, որ ինչքան զարգացած են մարդու ինտելեկտը, այն կազմող որակները, այնքան մեծ է ինտելեկտուալ որոնման արդյունքում հաջողության հասնելու հնարավորությունը և, հետևաբար, մեծ է նաև նման որոնման գեղագիտական գրավչությունը:

Հետաքրքրասիրությունը ճանաչողական ակտիվ գործունեության հիմքում ընկած այս կամ այն երևույթի էական հատկանիշների և հարաբերությունների բազմակողմանի ճանաչման ձգտումն է: Առանց այդ ձգտման չկա ինտելեկտուալ որոնում: Հետաքրքրասիրությունն առանձնացվում է նաև որպես մաթեմատիկական գեղեցիկի առանձին հատկանիշ, որին մենք կանդրադառնանք ստորև:

Մտքի խորաթափանցությունը արտահայտվում է գլխավորը երկրորդականից, անհրաժեշտը պատահականից տարբերելունակության մեջ: Մտքի այս որակներն են, որ հնարավորություն են տալիս տեսնել օբյեկտում և այլ օբյեկտների հետ նրա փոխհարաբերություններում առկա գլխավորը, ոչ պատահականը, դիտարկել այն իր ամբողջության ու հիմնական գծերի մեջ: Խորաթափանցության այս որակները հանդես են գալիս և անհրաժեշտ են մաթեմատիկական գործունեության իրականաց-

ման գործընթացում: Միաժամանակ, մաթեմատիկական գործունեությունը և մաթեմատիկայի իմացությունը նպաստում են մարդու առօրեական և մասնագիտական գործունեության մեջ խորաթափանցության որակի մեծացմանը:

Մտքի ճկունությունը և շարժունակությունը ունեցած փորձը լայնորեն օգտագործելու, առարկաները և երևույթները նոր փոխհարաբերությունների մեջ հետազոտելու, մտածողության շաբլոնը հաղթահարելու ունակություններն են: Իսկ առանց հետազոտագործման՝ մարդու փորձը չունի մեծ արժեք. այն, ինչպես նաև գիտելիքը արժեքավոր են նոր փոխհարաբերություններում, անձանթ իրադրություններում օգտագործելու դեպքում, քանի որ մարդն իր գործունեության ընթացքում անընդհատ հայտնվում է նման փոխհարաբերությունների և իրադրությունների մեջ: Մտքի ճկունությունը և շարժունակությունը, այն բնութագրող որակները անհրաժեշտ են մաթեմատիկական գործունեության իրականացման համար, իսկ նման գործունեությունն իր հերթին նպաստում է մտքի ճկունության և շարժունակության որակների ձևավորմանը և զարգացմանը:

Մտածողության տրամաբանությունը հետազոտվող օբյեկտի էական հատկանիշների, այլ օբյեկտների հետ հնարավոր փոխհարաբերությունների հաշվառումով դատողություններ կատարելու ճշգրտությունը և հետևողականությունը պահպանելու ունակությունն է, ինչի գեղագիտական գրավչությանը մենք անդրադարձել ենք մաթեմատիկայի գեղեցիկ տրամաբանական խստության հատկանիշին նվիրված բաժնում:

Մտածողության ապացուցողականությունը անհրաժեշտ պահին մտահանգումները և եզրակացությունները հաստատող փաս-

տերի և օրինաչափությունների օգտագործման ունակությունն է: Այս ունակությունը անհրաժեշտ պայման է նաև մաթեմատիկական գործունեության համար. այն նպաստում է մաթեմատիկական գեղեցիկի այնպիսի կարևորագույն օբյեկտի հայտնաբերմանը և իրականացմանը, ինչպիսին ապացուցումն է: Միևնույն ժամանակ, մաթեմատիկական գործունեությունն առաջին հերթին մտքի ապացուցողականության որակի ձևավորմանն ու զարգացմանն ուղղված գործունեություն է:

Քննադատական մտածողությունը խնդրի պահանջներին հակասող եզրահանգումների հանգեցնող գործողություններից հրաժարվելու ունակությունն է: Սա ինտելեկտի կարևոր որակ է, որովհետև ոչ ոք ապահովագրված չէ սխալից և, ինչպես ժողովրդական իմաստությունն է ասում, «սխալի կեսից հետ դառնալը նույնպես քաջություն է»: Բարոյական հենք կա նաև մտավորականին տրվող հետևյալ բնութագրում՝ ճշմարիտ մտավորականը բանավեճի մեջ աշխատում է ոչ թե ամեն կերպ ապացուցել իր դրույթի ճշմարտացիությունը, այլ պատրաստ է ընդունել իր սխալը և ընդդիմախոսի օգնությամբ բացահայտել ճշմարտությունը: Սրան հակառակ՝ ամեն կերպ սեփական տեսակետին կառչելու, ամեն գնով այն պաշտպանելու ձգտումը կարող է խորացնել սեփական մոլորությունը և խանգարել ճշմարտության բացահայտմանը կամ խնդրի լուծմանը: Այս տեսակետից մաթեմատիկական գործունեությունը՝ մաթեմատիկական թեորեմի ապացուցումը կամ խնդրի լուծումը, ի վերջո, հանգեցնում է որոշակի պատասխանների, և դրանք չստանալու դեպքում անհրաժեշտաբար հարկ է լինում վերադառնալ ելակետին: Իսկ ահա քննադատական մտածողության առկայության

դեպքում հնարավոր կլինի ավելի շուտ զգալ սխալը, և մոլորության ճանապարհը կլինի շատ ավելի կարճ: Ավելացնենք, որ կան գործունեություններ, որոնցում սխալվելու գինը կարող է և շատ բարձր լինել:

Լայնախոհությունը ուսումնասիրվող օբյեկտը մտածողության ոլորտում համակողմանիորեն ընդգրկելու, խնդրի լուծման բոլոր տարբերակները հաշվարկելու ունակությունն է: Լայնախոհությունը ենթադրում է առարկայի, երևույթի համակողմանի դիտարկում և ուսումնասիրություն, ինչն անհրաժեշտ է նաև դրանց գեղագիտական գրավչության բացահայտման համար: Այսպես, օրինակ, ճարտարապետական կառույցի մասին ամբողջական պատկերացում ունենալու, նրա գեղեցկությունը լիարժեք ընկալելու համար անհրաժեշտ է ոչ միայն տարբեր դիրքերից, ներսից ու դրսից դիտել այն, այլև խորամուխ լինել նրա կառուցման առանձնահատկություններին: Նույնը վերաբերում է նաև մաթեմատիկական փաստերին: Դրանց ձևակերպումներում առկա պայմաններից յուրաքանչյուրի նշանակությունը, ապացուցումը, դրա հիմքում ընկած մեթոդը, նրա կապը այլ օբյեկտների հետ և այլ գործոնների համակողմանի քննարկումը միայն կարող են ապահովել մաթեմատիկական օբյեկտի լիարժեք ճանաչողությունը և բացահայտել նրա գեղագիտական գրավչությունն ամբողջությամբ:

Զանքերը, որ ներդրվում են առարկայի էությունը հասկանալու համար: Ինչպես նշվեց վերևում, մաթեմատիկական գործունեության գեղագիտական գրավչության այս հատկանիշի վերաբերյալ Հ. Այզենկը և Գ. Բիրկհոֆը ունեն տրամագծորեն հակադիր մոտեցումներ. առաջինը գտնում է, որ մաթեմատիկական գեղեցիկի չափը ուղիղ, իսկ երկրորդը՝ հակադարձ համեմատական է նրա

էութիւնը հասկանալու կամ այն հայտնագործելու համար ներդրված ջանքերին: Իրականում այս հատկանիշի դրական կամ բացասական ազդեցությունը մաթեմատիկական օբյեկտի գեղագիտական գրավչության վրա կախված է մաթեմատիկական գործունեության տեսակից և այն իրականացնողից: Եթե գործունեությունը կատարվում է մաթեմատիկոսի կողմից և ուղղված է օբյեկտի հատկությունների հայտնագործմանը, ապա այստեղ գործում է Հ. Այզենկի մոտեցումը: Լեզենդը պատմում է, որ մաթեմատիկայում իր անունով կոչվող թեորեմի ապացույցի հայտնագործումից հետո այնքան մեծ է եղել Պյութագորասի ուրախությունը, որ նա հարյուր եզ է զոհաբերել աստվածներին՝ իր երկարատև ջանքերը հաջողությամբ պսակելու համար: Անկասկած է, որ այդ և հետագայում դրա հարյուրավոր այլ ապացույցներում առկա է գեղեցիկը՝ որպես մաթեմատիկական հասկացությունների միջև կապերի և օրինաչափությունների բացառիկ դրսևորում: Սակայն պետք է կարծել, որ այդ ապացուցումների հեղինակներից ոչ ոք այդ գեղեցիկը չի զգացել այնպիսի խորությամբ, և ոչ-որ այնքան խորը չի ապրել գեղեցիկի պարզևած ուրախության ու բերկրանքի պահը, ինչքան Պյութագորասը: Պատճառը, առաջին հերթին, անշուշտ, հայտնագործման գեղագիտական հատկանիշն է, բայց այստեղ կարևոր դեր է ունեցել նաև այն ջանքերի չափը, որ ներդրել է Պյութագորասը իր թեորեմի ապացուցումը հայտնագործելու համար:

Իսկ եթե մաթեմատիկական գործունեությունը ուղեկցվում է երկարաշունչ հաշվարկներով ու ստուգումներով, ապա գործադրված ջանքերը կարող են միայն ձանձրույթ պատճառել այն իրականացնողին, և այս դեպքում էլ իրավացի է Բիրկհոֆը:

Ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությունը: Ճանաչողությունը մեծ դեր ունի մարդու կենսագործունեության, նրա պահանջմունքների բավարարման գործում. առանց գիտելիքների, որոնք ձեռք են բերվում ճանաչողության ընթացքում, մարդը չի կարող գոյատևել: Իսկ այստեղ մարդու համար կարևորը ճշմարիտ գիտելիքներն են: Այդ պատճառով ճշմարիտ գիտելիքը, ճշմարտությունը մեծ մասամբ ունեն գեղեցիկին հատուկ ձգողականություն և ցանկալի են մարդու համար: Սակայն ոչ բոլոր ճշմարտություններն են ցանկալի. անհաջողության, հիվանդության, սիրելի մարդու կորստի լուրերը թեև կարող են ճշմարտություններ լինել, բայց ցանկալի չեն մարդու համար:

Այլ է գիտական ճշմարտությունը. այն իրականացնում է միայն լուսավորող գործառույթ: Այս տեսակետից մաթեմատիկական ճշմարտությունը զբաղեցնում է առանձնահատուկ տեղ: Ի տարբերություն մնացած գիտությունների՝ այն չի կարող լինել հարաբերական և միշտ համարվում է բացարձակ: Սուտը, կեղծիքը, մոլորությունը այստեղ բացակայում են: Վստահորեն կարելի է ասել, որ մաթեմատիկական գործունեությունը բացառիկ մի բնագավառ է, որտեղ մարդը հնարավորություն ունի առնչվելու միայն ճշմարտության հետ: Այս տեսակետից մաթեմատիկական գործունեությունը ուղղված է նաև բարոյական դրական արժեքների ձևավորմանը / [10]/:

Իսկ ինչո՞ւ հազարավոր գիտնականներ, երբեմն մոռանալով հանգստի, անգամ սննդի մասին, իրենց ժամանակը տրամադրում են գիտական աշխատանքների կատարմանը, գիտական ճշմարտությունների բացահայտմանը, զանազան գիտական խնդիրների լուծմանը: Հիմնական պատճառը, թերևս, թաքնված է խնդրի ոչ

ակնհայտ պատասխանը՝ լուծումը, գիտական օրինաչափությունը գտնելու, հայտնաբերելու մեջ: Նշանակում է՝ այդ ոչ ակնհայտ լուծման կամ գիտական օրինաչափության հայտնաբերումն ունի ինչ-որ գրավչություն, գեղագիտական արժեք, որով ձգում է դրանով հետաքրքրվողին, և հայտնաբերողին պատճառում է որոշակի հաճույք, բերկրանք, որն արտահայտվում է ճշմարտության իմացության ուրախությամբ: Գիտական յուրաքանչյուր ոչ ակնհայտ ճշմարտության հայտնաբերումը, շփումը նրա հետ հայտնաբերողին պատճառում են նման գեղագիտական հաճույք:

Այդ ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացության կամ բացահայտման բերած գեղագիտական հաճույքն էր, որ Արքիմեդին ստիպեց բացականչել՝ էվրիկա /լատիներեն՝ գտա/, և մերկ վիճակում բաղնիքից դուրս վազել՝ Հերոն երկրորդ թագավորին հաղորդելու նրա հանձնարարած խնդրի՝ իր գտած ամենևին ոչ ակնհայտ և ակնհայտորեն չափազանց հնարամիտ լուծման մասին: Իսկ թագավորը նրան հանձնարարել էր պարգել՝ արդյոք ճշմարիտ են իրեն հասած այն լուրերը, թե իր թագը պատրաստող վարպետը ստացած ոսկուց որոշակի քանակություն է պահել՝ դրա փոխարեն օգտագործելով արծաթ: Խնդիրը հեշտ չէր թվում: Նրա լուծման շուրջ երկար խորհրդածությունները Արքիմեդին տարան բաղնիք: Հնարավոր է, որ բաղնիքում տակառի մեջ ընկղմվելը նրա մոտ ինչ-որ մտահղացում է առաջացրել: Բոլոր դեպքերում թագավորի հանձնարարած խնդրի լուծումը նա գտել էր բաղնիքում: Հասնելով պալատ՝ Արքիմեդը թագավորից պահանջեց վարպետի պատրաստած թագը, նույն քաշն ունեցող մաքուր ոսկու կտոր և ջրով լիքը լցված երկու աման: Թագը և ոսկու կտորը նա ընկղմեց այդ ամաններից յուրաքանչյուրի մեջ և տեսավ, որ թագը ընկղմած ամանից

ավելի շատ ջուր է թափվել: «Վարպետը արդար չի եղել», - եզրակացրեց Արքիմեդը և լուծման գաղտնիքը բացատրեց թագավորին. դրա հիմքում ընկած էր հայտնի օրենքը, որ այսօր կոչվում է հենց Արքիմեդի անունով:

Մաթեմատիկան մի բնագավառ է, որի օբյեկտները՝ հասկացությունները, թեորեմները, դրանց ապացուցումները մեծ մասամբ ոչ ակնհայտ ճշմարտություններ են: Դրանց իմացությունը կամ հայտնագործումը պահանջում են մտքի ու կամքի մեծ լարում, կամային որակների դրսևորում: Պատահական չէ, որ մաթեմատիկական գործունեությունն անվանում են մտքի մարմնամարզություն: Իսկ մարմնամարզությունը, չնայած բարդ ու դժվարին վարժությունների առկայությանը, դրանով զբաղվողին հաճույք է պատճառում, նաև գեղագիտական հաճույք, որովհետև վարժությունը կատարողը ոչ միայն փորձում է իրականացնել պահանջվող մարմնամարզական հնարքը, այլև աշխատում է այն գեղեցիկ կատարել: Նույնն է պատկերը նաև մտքի մարմնամարզության՝ մաթեմատիկայի պարագայում. տարբերությունը միայն ֆիզիկականի և հոգևորի մեջ է:

Անսպասելիությունը և անկանխատեսելիությունը: Մի առիթով Գարսիա Մարկեսը ասել է. «Շատ մի՛ աշխատեք հեռավոր նպատակներ նախանշել և պլաններ գծել. նշանակալից բաները կատարվում են անսպասելի»: Անսպասելիությունը և անկանխատեսելիությունը ուղեկցվում են զարմանք արտահայտող հույզերով և, այդ պատճառով, ունեն գեղագիտական գրավչության մեծ ներուժ:

Անսպասելիությունը՝ որպես մաթեմատիկայի գեղագիտության հատկանիշ են դիտարկում Վ. Գ. Բոլտյանսկին, Գ. Ի. Սա-

րանցը, Մ. Ս. Յակիրը, Ա. Վ. Վոլոշինովը: Վերջինս [55] աշխատանքում դիտարկում է անսպասելիության հատկանիշի դրսևորման հետևյալ օրինակը: Կանոնավոր գլանին ներգծված են գունդ և կոն, որի հիմքը համընկնում է գլանի հիմքերից մեկի հետ, իսկ գագաթը գտնվում է գլանի մյուս հիմքի կենտրոնում: Ինչպե՞ս են հարա-բերվում գլանի, գնդի և կոնի ծավալները: Թեև հաշվումներն այստեղ շատ պարզ են, այնուամենայնիվ, ստացված արդյունքը անսպասելի է. պահանջվող հարաբերություններն արտահայտվում են այսպես՝ 3:2:1: Այն, որ գլանի ծավալը երեք անգամ մեծ կլինի նրան ներգծված կոնի ծավալից, կարելի էր սպասել /նման կապ կա պրիզմայի և նրան ներգծված բուրգի միջև/, բայց որ գնդի ծավալն էլ երկու անգամ է մեծ կոնի ծավալից, շատ անսպասելի է, ինչը ստացված արդյունքին հաղորդում է գեղագիտական որոշակի գրավչություն:

Մաթեմատիկական գործունեության ընթացքում գեղագիտական այս հատկանիշներն առավել ակնառու են դրսևորվում հայտնագործությունների ժամանակ: Մաթեմատիկական հայտնագործման անսպասելիության գեղագիտական գրավչության մասին նշում է Ա. Պուանկարեն: Սովորաբար գիտնականները, ելնելով իրենց փորձից և դրա հիման վրա մշակված ինտուիցիայից, իրենց առջև կանգնած գիտական խնդիրները լուծելու համար առաջադրում են որոշակի վարկածներ և ձեռնամուխ են լինում դրանց ապացուցմանը կամ հաստատմանը:

Սակայն ոչ միշտ են այդ վարկածներն իրականանում, երբեմն ստացվում են նոր, անսպասելի կամ անկանխատեսելի արդյունքներ, և այդ դեպքերում դրսևորվում են համապատասխան գեղագիտական հատկանիշներ, որոնք նման հայտնագործու-

թյուններին լրացուցիչ գեղագիտական լիցք, գրավչություն են հաղորդում: Գիտական աշխարհը, օրինակ, համոզված էր, որ Եվրոպայից շարժվելով դեպի արևմուտք՝ անպայման պետք է հասնել Հնդկաստանին կամ Չինաստանին: Սակայն Կոլումբոսի՝ այդ ճանապարհով հայտնաբերած աշխարհամասը ոչ Հնդկաստանն էր, ոչ էլ Չինաստանը: Կարելի է պատկերացնել գեղագիտական բավարարվածության, հաճույքի չափը, որ համակել է Կոլումբոսին, ժամանակի գիտական և հասարակական մտքին՝ այս հայտնագործության մասին տեղեկությունը ստանալիս: Նման հայտնագործություններով հարուստ են բոլոր գիտությունները:

Մաթեմատիկայի զարգացման պատմությունը նույնպես մեզ տալիս է անսպասելիության և անկանխատեսելիության դրսևորման բազմապիսի օրինակներ: Այսպես, Պյութագորասը և նրա հետևորդները համոզված էին, որ աշխարհը կառավարվում է թվերի միջոցով: Այս համոզումը ամրապնդվեց թվերի միջոցով երաժշտության օրինաչափությունները արտահայտելուց հետո: Սակայն մեծ եղավ Պյութագորասի և նրա աշակերտների զարմանքը և, մանավանդ, հիասթափությունը, երբ պարզվեց, որ քառակուսու կողմի և անկյունագծի հարաբերությունն անհնար է արտահայտել թվերի հարաբերությամբ:

Հարկ է նշել, որ թիվ ասելով պյութագորականները նկատի ունեին բնական թվերը, և իրենք կատարել էին մաթեմատիկական ամենամեծ հայտնագործություններից մեկը. հայտնաբերել էին իրացիոնալ թվերը: Սակայն ստացված արդյունքն այնքան անսպասելի էր, որ նրանք չկարողացան ընկալել այն: Հետագայում գիտական միտքը հասկացավ Պյութագորասի հայտնագործության իմաստը. մաթեմատիկայում ներմուծվեցին իրական թվերը, ինչը

հարստացրեց մաթեմատիկան, այն դարձրեց ավելի կատարյալ, մեծացրեց նրա կիրառության ոլորտը և, բնականաբար, ավելացրեց նրա գեղագիտական գրավչությունը:

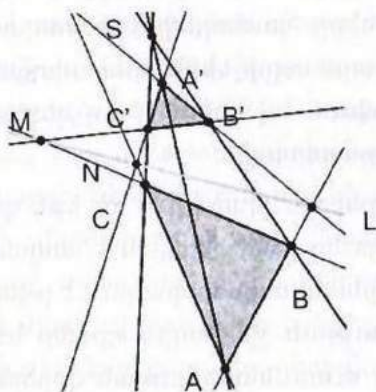
Անսպասելիության և անկանխատեսելիության հրաշալի օրինակ է Գաուսի, Լոբաչևսկու և Պոլյայի կողմից ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափության հայտնագործումը: Շուրջ երկու հազար տարի մաթեմատիկոսները փորձում էին էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմն ապացուցել բացարձակ երկրաչափության աքսիոմների միջոցով: Սակայն գիտնականների այդ եղյակը ցույց տվեց, որ նման բան հնարավոր չէ անել. այդ աքսիոմներն անկախ են իրարից: Եվ առաջադրելով զուգահեռության մասին էվկլիդեսի աքսիոմին հակասող դրույթը որպես նոր աքսիոմ՝ նրանք հանգեցին ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափության գաղափարին: Եվ զարմանալին այն է, որ այդ նոր երկրաչափությունը, որին մաթեմատիկոսները սկզբնական շրջանում վերաբերվում էին անվստահությամբ ու կասկածանքով, լուրջ կիրառություն գտավ ֆիզիկայում: Այս ամենից հետո ստացված արդյունքների գեղագիտական գրավչությունն ակնառու էր արդեն բոլոր մաթեմատիկոսների համար:

Անսպասելիության և անկանխատեսելիության հատկանիշները կարող են դրսևորվել նաև մաթեմատիկական թեորեմների ապացուցման և առաջադրված խնդիրների լուծման ընթացքում: Նախորդ կետում մենք դիտարկեցինք Քլոսիգսբերգի յոթ կամուրջների խնդիրը՝ նրա լուծման գեղագիտական գրավչությունը պայմանավորելով հեղափոխական բայի առկայությամբ, ինչը կապված էր լուծման իրականացման համար Էյլերի կողմից գրաֆների տեսության հայտնագործման հետ: Այս հայտնագործությունն ունի նաև անսպասելիության և անկանխատեսելիու-

թյան, առաջադրված տեսության և լուծման ընդհանրականության և բազմազանությունների միասնության գեղագիտական հատկանիշներ, որոնք ուսումնասիրողի մոտ առաջացնում են զարմանքի և հիացմունքի գեղագիտական հույզեր:

Երկրաչափության և, ընդհանրապես, մաթեմատիկայի ամենագեղեցիկ թեորեմներից մեկը Դեզարգի թեորեմն է. եթե հարթության մեջ տրված են ABC և $A'B'C'$ եռանկյունները և AA' , BB' , CC' ուղիղները հատվում են մի կետում, ապա AB և $A'B'$, AC և $A'C'$, BC և $B'C'$ ուղիղների հատման կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

Ա. Վ. Վոլոշինովը այս թեորեմի գեղեցկությունը բացատրում է գիտական գեղեցիկի Խատչեսոնի առաջին երկու հայտանիշներով [55]: Իսկապես, այն կախված չէ թեորեմում նշված եռանկյունների տեսքերից ու դասավորություններից: Պահանջվում է միայն, որ եռանկյունների համապատասխան զագաթները միացնող ուղիղները հատվեն մի կետում, և այդպիսի եռանկյունների ամբողջ բազմազանության համար տեղի ունի թեորեմի եզրակացությունը. նրանց



համապատասխան կողմերի շարունակությունների հատման կետերը կգտնվեն մի ուղղի վրա: Թեորեմի գիտական գեղեցկության վրա անդրադառնում է նաև Խատչեատնի երրորդ հայտանիշը. այն ոչ ակնհայտ ճշմարտություն է: Բայց նույն հատկանիշներով օժտված են մաթեմատիկայի շատ թեորեմներ, որոնք սակայն չունեն Դեգարգի այս թեորեմի հմայքը: Հետևաբար, այստեղ գործում են նաև գիտական գեղեցիկի այլ հատկանիշներ: Մասնավորապես, մեծ է անսպասելիության և, մանավանդ, անկանխատեսելիության հատկանիշների դերը:

Խորամուխ լինելով հանրահաշվի և երկրաչափության միջև առկա կապերի և ընդհանրությունների մեջ՝ մենք կարող ենք ավելի հեռուն գնալ և բացահայտել Դեգարգի թեորեմի հետ կապված գիտական գեղեցիկի ավելի խորը արտահայտություններ: Պյութագորասը և պյութագորականները աշխարհակառույցի հիմքում դնում էին թվերը և ամեն ինչ բացատրում էին թվերով ու նրանց միջև եղած առնչություններով: Այդ առնչությունների մեջ անպայման ենթադրվում էին գումարի և արտադրյալի տեղափոխական օրենքները. գումարելիների տեղափոխումից գումարը չի փոխվում, և արտադրիչների տեղափոխումից արտադրյալը նույնպես չի փոխվում: Եվ մինչև 19-րդ դար մաթեմատիկոսները հետևում էին Պյութագորասին:

Բայց 19-րդ դարում պարզվեց, որ եթե գումարի նկատմամբ նման ենթադրությունը շատ բնական է, ապա արտադրյալի դեպքում այն էականորեն սահմանափակում է թվերի կիրառման ոլորտը և հնարավորություն չի տալիս դրանք ներգրավել բնության շատ երևույթների ուսումնասիրության գործընթացում: Այդ սահմանափակումը հաղթահարելու համար ստեղծվեցին նոր թվեր,

որոնք, օժտված լինելով գումարման և բազմապատկման բոլոր հատկություններով, արտադրյալի նկատմամբ տեղափոխական չէին: Այդ թվերն անվանվեցին հիպերկոմպլեքս թվեր: Հետագայում մաթեմատիկոսների կողմից կատարվեց ևս մեկ կարևոր քայլ. թվերը փոխաբինվեցին առարկաների կամայական բազմությամբ, որոնց հետ հնարավոր էր կատարել երկու գործողություն և որոնք օժտված էին գումարման ու բազմապատկման բոլոր հատկություններով՝ բացառությամբ բազմապատկման տեղափոխելիությունը: Ստացված համակարգերը կոչվեցին մարմիններ և մեծ կիրառություն ստացան ինչպես մաթեմատիկայում, այնպես էլ գիտության տարբեր բնագավառներում: Մարմինների օրինակներ են ինչպես իրական և կոմպլեքս թվերի համակարգերը, այնպես էլ հիպերկոմպլեքս թվերի համակարգը /տես, օրինակ, [9]:

Հետևելով Դեկարտին՝ կարելի է մարմինների միջոցով ստեղծել նաև կոորդինատական համակարգ, և դրա լեզվով շարադրել նոր երկրաչափություն: Բնականաբար, այդ երկրաչափությունը կարող է տարբեր լինել սովորական երկրաչափությունից, որովհետև մարմիններում բազմապատկման տեղափոխական հատկությունը կարող է տեղի չունենալ: Եվ, իրոք, պարզվում է, որ, օրինակ, նմանատիպ երկրաչափության մեջ Դեկարտի թեորեմը հնարավոր չէ ապացուցել: Իսկ ահա տեղափոխական արտադրյալով մարմիններում Դեկարտի թեորեմը տեղի ունի: Եվ զարմանալին այն էր, որ Դեկարտի թեորեմը տեղի ունի միայն տեղափոխական մարմինների միջոցով ստացված երկրաչափություններում, այսինքն՝ եթե մարմնի միջոցով ստացված երկրաչափություններում տեղի ունի Դեկարտի թեորեմը, ապա այդ մարմնում բազմապատկման գործողությունը տեղափոխական է:

Ստացվում է, որ ինչ-որ իմաստով Դեզարգի թեորեմը համար-
ժեք է արտադրյալի տեղափոխականությանը /[155]/: Անշուշտ, այս-
տեղ գիտական գեղեցիկը դրսևորվում է Խատչեատնի առաջին՝ բազ-
մազանությունների միասնության, և երրորդ՝ ոչ ակնհայտ ճշմար-
տության իմացության հայտանիշներով: Եվ գեղեցիկը ավելի նշա-
նակալից է դառնում, քանի որ բազմազանությունները, որոնց մասին
խոսք է գնում այդ հայտանիշներում, այսինքն՝ հանրահաշվական
մարմինը և երկրաչափական հարթությունը իրարից բավականին
հեռու են ու իրարից շատ տարբեր, ինչը ավելի ակնառու է դարձնում
անսպասելիության և անկանխատեսելիության հատկանիշների դերը
ստացված այս արդյունքի գեղագիտական գրավչության մեջ:

**Նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահա-
րումը, նպատակին հասնելը:** Մաթեմատիկական գործունեություն-
նը, սկսած հանրակրթական և բարձրագույն դպրոցներում համա-
պատասխան դասընթացների յուսուցումից, մինչև մաթեմատիկա-
կան հայտնագործությունների իրականացումը, բարդ ու դժվարին
խոչընդոտների հաղթահարմանը նպատակաուղղված գործընթաց
է: Այն, մինչև մաթեմատիկական հայտնագործությունների կա-
տարման մակարդակի ձեռքբերումը, հետազոտողից պահանջում է
համառ ու հետևողական աշխատանք՝ առկա բարդ ու դժվարին
նյութը հաղթահարելու, համապատասխան տեսության դրույթները
յուրացնելու համար: Իսկ մաթեմատիկական յուրաքանչյուր տե-
սություն ճարտարապետական յուրահատուկ կառույց է, որի տար-
րերի միջև առկա փոխհարաբերությունները ոչ միայն օժտված են
առանձնահատուկ գեղեցկությամբ, այլև նախանշում են փոխհա-
րաբերությունների հետագա ընթացքը, և ճշմարիտ միտքն ու ոգին
մղում են ճանաչողության: Եվ այդ բարդ ու դժվարին խոչընդոտ-

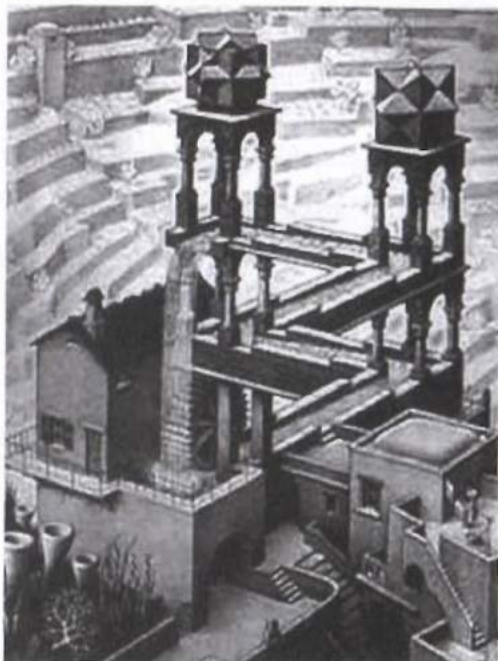
ների հաղթահարումը իմացությանը հաղորդում է որոշակի գեղագիտական գրավչություն:

Ամբողջ այս գործունեությունը թույլ է տալիս մաթեմատիկական նյութի իմացությունն ուղեկցել նրա ճարտարապետական կառույցի գեղեցկության ճանաչումով, իսկ վերջնական նպատակի՝ մաթեմատիկական հայտնագործության իրականացումը ուղեկցվում է գեղեցիկի զգացողությամբ: Եվ սա նկատի ունի Ջ. Ֆոն Նեյմանը, երբ գտնում է, որ մաթեմատիկան զարգանում է հիմնականում գեղագիտական մոտիվների շնորհիվ:

§4. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԳԵՂԵՑԻԿԻ ԱՐՏԱՔԻՆ ԵՎ ՆԵՐՔԻՆ ԴՐՍԵՎՈՐՈՒՄՆԵՐԸ

Մաթեմատիկական գաղափարները, ինչպես և ներկերն ու բառերը, պետք է կազմեն ներքին ներդաշնակություն:

Գ. Հարդի



Մորիս Էշեր, Ջրվեժ, 1961

Ինչպես գեղեցիկն ընդհանրապես, այնպես էլ մաթեմատիկական գեղեցիկը ունի ինչպես արտաքին, այնպես էլ ներքին դրսևորումներ: Որոշ հեղինակներ նման դրսևորումներն անվանում են մաթեմատիկայի արտաքին և ներքին գեղագիտություն /[71]/:

1. Գեղեցիկի արտաքին դրսևորումները

Սովորաբար մաթեմատիկական գեղեցիկի արտաքին դրսևորումը նույնացվում է մաթեմատիկական օբյեկտների արտաքին տեսքի գեղագիտության հետ, և քանի որ կա մաթեմատիկական օբյեկտների արտաքին արտահայտության երկու եղանակ՝ անալիտիկ և երկրաչափական, ապա բնական է համարվում զանազանել մաթեմատիկայի արտաքին գեղագիտության երկրաչափական ձևերի և մաթեմատիկական գրառման տեսակները /տես, օրինակ, [71]/:

Երկրաչափական ձևի տեսակետից որպես գեղագիտության հատկանիշներ կարող են հանդես գալ զծի, պատկերի կամ մարմնի համաչափությունը, համեմատությունը, մասնավորապես, ոսկե հատումը, ռիթմը, ներդաշնակությունը:

Համաչափությունը երկրաչափական ձևին հաղորդում է գեղագիտական գրավչություն. ինչքան շատ են նման համաչափությունները, այնքան մեծ է այդ ձևի գեղագիտական գրավչությունը: Մաթեմատիկական գեղեցիկի համաչափության հատկանիշի տեսանկյունից երկրաչափական ձևերի գեղագիտական գրավչությանը մենք կանդրադառնանք առաջիկայում:

Երկրաչափական ձևերի գեղագիտական գրավչության մի այլ աղբյուր են համեմատությունները, մասնավորապես, ոսկե հատումը, ինչը լայնորեն դրսևորվում է բնության մեջ և կիրառվում արվեստում: Բոլոր այս, ինչպես նաև երկրաչափական ձևերի գեղագիտական գրավչության հարցը մաթեմատիկական գեղեցի-

կի՝ ռիթմի և ներդաշնակության հատկանիշների տեսանկյունից, կրնանք այս աշխատանքի հաջորդ գլխում:

Ինչ վերաբերում է մաթեմատիկական արտահայտությունների կամ բանաձևերի անալիտիկ գրառմանը, ապա նկատենք, որ յուրաքանչյուր առարկայի, երևույթի արտաքին տեսքը, ձևը կոչված են նրա էությունը արտահայտելու համար, և բնական է միևնույն օբյեկտի տարբեր գրառումներից գեղեցիկ համարել այն, որը առավելագույնս նպաստում է օբյեկտի էության ընկալմանը, հասկանալու գործընթացին: Այս տեսակետից որպես մաթեմատիկական գեղեցիկի արտաքին հատկանիշներ՝ պետք է ընդունել հստակությունը, պարզությունը, կիրառելիությունը:

Մաթեմատիկայի, նրա լեզվի հստակությունը հասկացությունների և դրանց վերաբերյալ դատողությունների միանշանակ, անորոշություններից զերծ ներկայացումն է, ինչին մաթեմատիկական հասնում է հաճախ սիմվոլների չափազանց մեծ քանակի օգտագործման շնորհիվ: Սիմվոլների այդ մեծ քանակը, սակայն, երբեմն խանգարում է մաթեմատիկական նյութի էության ընկալմանը, և այստեղ հասունկ հնարքների միջոցով մաթեմատիկական հասնում է որոշակի պարզեցումների: Դիտարկենք, օրինակ, միևնույն արտահայտության գրառումները $2+3\cdot4-6:3$ և $(2+(3\cdot4))-(6:3)$ տեսքերով և փորձենք պարզել, թե դրանցից որն է ավելի գեղեցիկ: Առաջին արտահայտության տեսքը գեղեցիկին բնորոշ որևէ հատկությամբ աչքի չի ընկնում: Մինչդեռ երկրորդում առկա է ձախ և աջ փակագծերի երեք զույգ, որոնք դասավորված են համաչափություններով: Վերջիններս որոշակի արտաքին գրավչություն են հաղորդում այդ արտահայտությանը: Սակայն մաթեմատիկական գործունեությունը իրականացնող յուրաքանչյուր մարդ կնախընտրի գործ

ունենալ ոչ թե երկրորդ, այլ առաջին գրառման հետ: Ինչո՞ւ: Բանն այն է, որ այս և մաթեմատիկական յուրաքանչյուր այլ գրառման հիմնական նպատակը ոչ թե արտաքին էֆեկտ առաջացնելն է, այլ այդ գրառման էությունն իրականացնելը, տվյալ դեպքում՝ գործողությունների կատարումը, և գրառումը նախընտրելի է, լավն է, գեղեցիկ է, եթե հեշտացնում է այդ գործընթացը: Նշված արտահայտություններից առաջինը երկրորդի պարզեցված գրառումն է, որ ստացվում է վերջինից՝ գործողությունների կարգի մասին կանոնների կիրառմամբ փակագծերից ազատվելու միջոցով: Եթե նման կանոններ չընդունենք, ապա արտահայտության կամ բանաձևի մեջ փակագծերի առատությունը, որ թելադրվում է հստակության պահանջով, կխանգարի արտահայտության կամ բանաձևի ընկալմանը, կոժվարացնի նրա հետ կատարվող աշխատանքը: Իսկ համապատասխան պարզեցումը հեշտացնում է նման ընկալումն ու աշխատանքը և արտաքին տեսքն էլ դարձնում է գեղագիտորեն գրավիչ:

Մաթեմատիկայի ողջ պատմությունը նաև սիմվոլների որոնման, դրանց միջոցով մաթեմատիկական արտահայտությունների ու բանաձևերի գրառման, հստակեցման ու պարզեցման պատմություն է: Բավական է հետևել մաթեմատիկական լեզվի զարգացման այդ ընթացքին, համեմատել միևնույն օբյեկտի ներկայացման տարբեր տեսքերը նրա տարբեր փուլերում, որպեսզի երևա նաև դրանց արտաքին գեղագիտության զարգացումը: Վստահորեն կարելի է ասել, որ առանց այդ գեղագիտական առաջընթացի անհնար կլիներ նաև մաթեմատիկայի առաջընթացը: Դրա համար բավական է, օրինակ, իրականացնել թվերի, դրանց նկատմամբ կատարվող գործողությունների համեմատում, երբ դրանք ներկա-

յացված են երկու՝ հոռմեական և դիրքային գրառման եղանակներով: Բսկապես, փորձեք իրար հետ բազմապատկել հոռմեական գրությամբ գրառված երկու թվեր կամ, որ ավելի դժվար է, բաժանել դրանք: Վերջին գործընթացն այնքան դժվար է, որ միջնադարում հատուկ մաթեմատիկական մասնագիտություն է առաջ եկել՝ թվերի բաժանման գործընթացն իրականացնելու համար: Մի այլ օրի-նակի մենք հանդիպում ենք միջնադարյան Հայաստանում, որտեղ խոշորագույն մաթեմատիկոս Անանիա Շիրակացու լուրջ ծառայություններից մեկը բնական թվերի հետ գործողությունների աղյուսակների կազմումն է եղել: Եվ միայն թվերի դիրքային գրության շնորհիվ այսօր նշված գործընթացները որևէ դժվարություն չեն ներկայացնում անգամ տարրական դպրոցի աշակերտների համար:

Հստակեցման և պարզեցման գեղագիտական հատկանիշներն ուղեկցել են մաթեմատիկական հասկացությունների, թեորեմների, ապացուցումների ստեղծմանը: Բավական է նշել, որ զուգահեռության մասին Էվկլիդեսի աքսիոմի ապացուցման ապարդյուն փորձերի երկուհազարամյա պատմությունը, ի վերջո, Էվկլիդեսյան երկրաչափության մեջ հստակության հատկանիշի բացակայության արդյունք է: Եվ հստակության հաստատումն էր, որ թույլ տվեց լուծել զուգահեռության աքսիոմի վերաբերյալ դարավոր խնդիրը և, միաժամանակ, ստեղծել երկրաչափության միանգամայն նոր բնագավառներ: Նույնը վերաբերում է նաև բազմությունների նախկին տեսության մեջ առաջացած անտիևոմներին, որոնց հաղթահարման համար Դ. Հիլբերտի և ժամանակի մյուս մաթեմատիկոսների ջանքերն ուղղված էին հստակության և պարզության հաստատմանը: Գեղեցիկի արտաքին դրսևորման տեսակե-

տից այստեղ հետաքրքիր է, օրինակ, ապացուցման հիլբերտյան և հենցենյան եղանակների համեմատումը, որոնց մենք կանդրադառնանք այս աշխատանքի երկրորդ մասում:

Հարկ է նշել, որ Դեկարտի ստեղծած կոորդինատական մեթոդը միևնույն մաթեմատիկական օբյեկտի անալիտիկ և երկրաչափական ձևերով պատկերման հնարավորություններ է ստեղծում, և արտաքին գեղեցիկը կարող է չնկատվել օբյեկտի պատկերման մի ձևում, իսկ մյուսում կարող է լինել ակնառու: Այս կերպ, օրինակ, անալիտիկ եղանակով տրված գույգ ֆունկցիան գրաֆիկորեն պատկերվում է օրդինատների առանցքի, իսկ կենտ ֆունկցիան՝ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ համաչափ կորի տեսքով, ինչը արտաքին գեղագիտական գրավչություն է հաղորդում դրանց: Նույն կերպ պարբերական ֆունկցիան գրաֆիկորեն պատկերվում է անընդհատ կրկնվող մասեր ունեցող կորի տեսքով, ինչը ռիթմի հատկանիշ և գեղագիտական գրավչություն է հաղորդում նրան: Կորի կամ մակերևույթի ողորկությունը, որ գեղագիտական գրավչության հատկանիշ է, արտահայտում է համապատասխան ֆունկցիայի ածանցելիության հատկությունը, ինչը նրա անալիտիկ արտահայտման մեջ կարծես գեղագիտականի որևէ տարր չի նախանշում: Նույնը կարելի է ասել անընդհատության, կորության և այլ հասկացությունների մասին:

Նշենք նաև, որ ֆիզիկայի, քիմիայի և բնագիտական այլ գիտությունների օրինաչափությունների մաթեմատիկական գրառումը դրանց ձևն է, արտաքին կողմը, ինչը նպաստում է այդ օրինաչափությունն ուսումնասիրող գիտության շրջանակներում դրանց էության, ներքին կառուցվածքի բացահայտմանը:

2. Գեղեցիկի ներքին դրսևորումները

Եթե Խատչետունը և Վոլկենշտեյնը գիտական գեղեցիկի իրենց բնութագրումներում ելնում են արտաքին աշխարհի հետ երևույթի ունեցած փոխհարաբերություններից, ապա ֆրանսիացի փիլիսոփա, գրող և գեղագետ Հիպոլիտ Տենը (1828-1893) գեղեցիկը պայմանավորում է առարկայի բովանդակության հետ, և, ելնելով դրանից, արվեստի նպատակը տեսնում է առարկայի կամ երևույթի ներքին հատկանիշների, օրինաչափությունների, նրա մասերի միջև եղած փոխհարաբերությունների բացահայտման ու վերհանման մեջ /([16]): Եթե այս տեսակետից մոտենանք նաև գիտական երևույթներին, ապա, բնականաբար, դրանցում առկա ներքին օրինաչափությունները նույնպես խորն են և, անկասկած, ունեն գեղագիտական որոշակի գրավչություն: Սակայն դրանց իմացությունը, սովորաբար, պահանջում է մասնագիտական գիտելիքներ և պատրաստվածություն: Այն անհասանելի է ոչ մասնագետին, որի համար անհասկանալի է, օրինակ, մաթեմատիկոսի ինքնամոռաց աշխատանքը «չոր» թվերի ու բանաձևերի հետ, աշխատանք, որի իրականացման կարևորագույն խթաններից մեկը նրանում առկա գեղեցիկն է, որ հենվում է նաև երևույթների ներքին օրինաչափությունների վրա:

Գեղեցիկի ներքին դրսևորումները երևան են գալիս մաթեմատիկական օբյեկտների բովանդակության մեջ: Դրանք արտահայտվում են մաթեմատիկայի ընդհանուր ճարտարապետության, դրանք կազմող հասկացությունների, նրանց միջև եղած փոխհարաբերությունների՝ թեորեմների ու դրանց ապացուցումների, իմացության մեթոդների, գիտության տարբեր բնագավառներում

մաթեմատիկական լեզվի, փաստերի և մեթոդների կիրառման մեջ և նմանատիպ այլ գործընթացներում: Հարկ է նկատել, որ, ի տարբերություն իր արտաքին դրսևորման, մաթեմատիկական գեղեցիկի ներքին դրսևորումը միանգամից չի երևում, այն թաքնված է մաթեմատիկական երևույթի խորքում և հայտնաբերման, ընկալման համար պահանջում է որոշակի ջանքեր: Իրենց հերթին այդ ջանքերը՝ որպես մաթեմատիկական գեղեցիկի սուրբյեկտիվ հատկանիշներ, ավելի են գեղեցկացնում բովանդակային դրսևորմամբ արտահայտված գեղեցիկը:

Հասկացությունների պարագայում ներքին գեղեցիկը արտահայտվում է հասկացության ծավալի և բովանդակության, սեռային և դասային պատկանելության, հասկացության հատկությունների մեջ: Այստեղ մեծ դեր ունեն գիտության այլ ոլորտներում հասկացության կիրառման հնարավորությունները, որոնք հաճախ պայմանավորում են հասկացության ծնունդը:

Ներքին գեղեցիկը լայնորեն է դրսևորվում մաթեմատիկական թեորեմներում, որոնք արտահայտում են մաթեմատիկական հասկացությունների հատկությունները, դրանց միջև առկա փոխհարաբերություններն ու կապերը: Դրանցում առկա են գիտական գեղեցիկի այնպիսի օբյեկտիվ հատկանիշներ, ինչպիսիք են կարգը, համաչափությունը, համեմատությունը, ռիթմը, ներդաշնակությունը, կայունությունը, օպտիմալությունը, բազմազանությունների միասնությունը, ընդհանրականությունը, հեղափոխական քայլի առկայությունը, կիրառելիությունը: Միաժամանակ մաթեմատիկական թեորեմներն աչքի են ընկնում անկանխատեսելիությամբ, անսպասելիությամբ և գիտական գեղեցիկի սուրբյեկտիվ այլ հատկանիշներով: Գեղագիտական գրավչությունն այստեղ պայ-

մանավորված է նաև ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությամբ, հայտնաբերման կամ հասկանալու համար բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարմամբ, ինտելեկտուալ որոնման, հայտնագործության իրականացմամբ, այն ջանքերի չափով, որոնք անհրաժեշտ են առարկայի էությունը հասկանալու համար և այլն: Նույնը վերաբերում է նաև թեորեմների ապացուցումներին, ինչին մենք կանդրադառնանք առաջիկայում:

3. Գեղեցիկի արտաքին և ներքին դրսևորումների փոխհարաբերությունը

Բնական է գեղեցիկի առաջին՝ արտաքին տեսակը վերագրել մաթեմատիկական առարկաների և երևույթների ձևին, երկրորդը՝ ներքինը՝ դրանց բովանդակությանը: Սակայն որոշ հետազոտողներ հակված են կարծելու, որ մաթեմատիկական օբյեկտի արտաքին գեղեցկությունն ընկալվում է ներքին բովանդակությունից անկախ: Ն. Գուսյևան, օրինակ, գտնում է, որ արտաքին գեղեցիկը բացահայտվում է զգայարանների միջոցով՝ առանց մտածողության ակտիվ մասնակցության, իսկ ներքին գեղեցիկի ընկալման համար, ընդհակառակը, անհրաժեշտ է մտածողության ակտիվ միջամտությունը /[71]/: Մենք կարծում ենք, որ այս մոտեցումը լիովին չի արտահայտում իրերի դրությունը: Իսկապես, ինչպես բնության մեջ կամ արվեստում, այնպես էլ գիտության, առավել ևս մաթեմատիկայի մեջ, առարկայի, երևույթի գեղագիտականի բացահայտման և ընկալման համար միայն զգայարանների մաս-

նակցությունը բավարար չի կարող լինել: Նման յուրաքանչյուր դեպքի համար անհրաժեշտ կլինի հաշվի առնել փորձը, ինտուիցիան, կատարել համեմատություններ, ինչի համար անհրաժեշտ է նաև մտածողության ակտիվ մասնակցությունը: Եվ, ընդհանրապես, առարկայի, երևույթի ձևը և բովանդակությունը գտնվում են օրգանական միասնության մեջ, և դրանցից յուրաքանչյուրի իմացությունից կախված է մյուսի իմացությունը: Նույնը վերաբերում է նաև գեղեցկությանը. առարկայի, երևույթի ներքին և արտաքին գեղեցկությունը փոխկապակցված են միմյանց հետ, առանց մեկի չի կարող լինել մյուսը, մեկի ճանաչումը օգնում է մյուսի իմացության բացահայտմանը, և դրանց միասնությունն է, որ թույլ է տալիս լիարժեք բացահայտել առարկայի էությունը, և այդ միասնությունն է, որ կազմում է նաև առարկայի, երևույթի գեղեցկությունը:

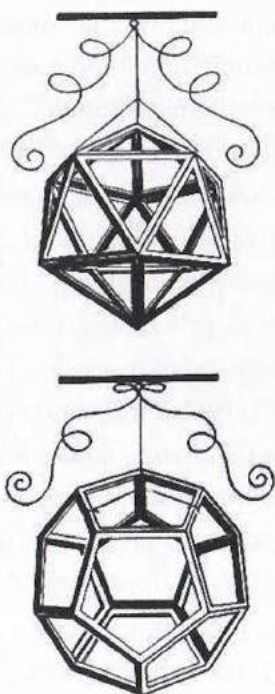
Վերցնենք թեկուզ $a^2 + b^2 = c^2$ բանաձևը: Մաթեմատիկայից հեռու մեկի համար այն որևէ բանով աչքի չի ընկնում: Սակայն իրականում այն արտահայտում է շատ խորը երկրաչափական օրինաչափություն. եռանկյունը ուղղանկյուն է այն և միայն այն դեպքում, եթե հնարավոր է նրա կողմերի երկարությունները այնպես նշանակել a , b , c տառերով, որ դրանք կապված լինեն նշված բանաձևով: Նույն կերպ $a^2 + b^2 < c^2$ բանաձևը արտահայտում է եռանկյան սուրանկյուն լինելը, իսկ $a^2 + b^2 > c^2$ բանաձևը՝ նրա բութանկյուն լինելը: Այս օրինաչափություններն օժտված են անսպասելիության, պարզության գեղագիտական հատկանիշներով և գրավիչ են: Իսկ առանց երկրաչափական մեկնաբանությունների, միայն այդ բանաձևերի անալիտիկ տեսքը գեղագիտական նշանակալից տարր չի պարունակում:

Կամ վերցնենք $\frac{4}{3}\pi R^3$ արտահայտությունը: Առաջին հայացքից այն մաթեմատիկական սիմվոլների հաջորդականություն է և մնացած նման հաջորդականություններից որևէ բանով չի տարբերվում: Բայց դեռևս հնադարի մաթեմատիկոսներն են պարզել, որ այդ բանաձևով է արտահայտվում կամ չափվում R շառավիղ ունեցող գնդի ծավալը: Ահա այդ օրինաչափությունն է, որ հետաքրքրություն է առաջացնում նշված արտահայտության նկատմամբ և այն դարձնում գրավիչ: Իր հերթին այդ տեսքը հնարավորություն է տալիս բացահայտելու ինչպես գնդի շատ հատկություններ, այնպես էլ այլ մարմինների հետ նրա զանազան կապեր: Օրինակ, դիցուք ունենք հիմքի R շառավիղով կանոնավոր գլան, որին ներգծված են գունդ և կոն: Այդ գլանի ծավալը կլինի $2\pi R^3$, իսկ կոնի ծավալը՝ $\frac{2}{3}\pi R^3$: Համեմատելով այդ արտահայտությունները՝ կարող ենք նկատել, որ կանոնավոր գլանի ծավալը հավասար է նրան ներգծված գնդի և կոնի ծավալների գումարին, այսինքն՝ գլանի մեջ ամբողջությամբ լցված հեղուկը կարելի է տեղավորել այնպիսի գնդի և կոնի մեջ, որոնք ներգծելի են նրան: Ստացված օրինաչափությունները և կապերը ունեն անսպասելիության, անկանխատեսելիության, պարզության, տրամաբանական խստության և մաթեմատիկայի գեղագիտության այլ հատկանիշներ, և դրանով էլ գրավիչ են դարձնում նշված արտահայտությունները:

Գլուխ 2. ԳԵՂԵՑԻԿԻ ԲԱՂԱԴՐԻՉՆԵՐԸ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ

Գեղեցիկը պահանջում է օրենք,
որն ամփոփված է երևույթի մեջ:

Գյոթե



Լեոնարդո դա Վինչի, Պլատոնյան
մարմիններ: Լուկա Պաչոլիի «Աստվածային համեմատությունների մասին»
գրքի զարդանկարներ: Վենետիկ, 1509

Սովորաբար ճշմարիտը ընկալվում է միայն այն դեպքում, երբ այն ճանաչվում է: Իսկ ահա գեղեցիկը կարող է ընկալվել առանց նրա ներքին օրինաչափությունների ճանաչման: Մենք ժամերով կարող ենք լսել, օրինակ, Արամ Խաչատրյանի հրաշալի երաժշտությունը, գմայլվել նրա գեղեցկությամբ՝ ամենևին չմտածելով նրա հիմքում ընկած օրինաչափությունների մասին: «Գեղեցիկը ունի իր սեփական օրենքները», -ասում է Շիլլերը: Այդ օրենքների փնտրտուքը սկսել են հին հույները, որոնք համոզված լինելով, որ տիեզերքը իր էությամբ գեղեցիկ է, այն անվանել են «կոսմոս», այսինքն՝ գեղեցիկ կառուցված: Եվ արվեստի նպատակը այդ գեղեցիկի հիմքում ընկած օբյեկտիվ օրինաչափությունների հայտնաբերումն է, ահա հույների գեղագիտության էությունը:

Տիեզերքի տարածական և ժամանակային կառուցվածքի իմացության մեջ հույները կարևոր տեղ էին հատկացնում համաչափությանը, համեմատությանը, ներդաշնակությանը և ռիթմին: Նրանք գեղեցկությունը արտահայտում էին մարդու մարմնի չափերով և համեմատություններով, ժամանակի հաջորդական հատվածներում բնության և օրգանական աշխարհի մշտական ռիթմիկ բաբախումներով, բուսական ու կենդանական աշխարհի համաչափություններով ու ներդաշնակությամբ: Իսկ մարդկային հանճարը այդ համաչափությունների միջոցով արտահայտում էր գեղեցկությունը անտիկ ճարտարապետության և քանդակագործության և այլ հրաշալի կոթողներում: Գեղագիտական մտքի հետագա ընթացքը հիմնականում պահպանեց գեղեցիկի հիմքում հույների դրած այս սկզբունքները: